

# 1 Mehrgitteralgorithmus

$\mathbf{MG}_l(\mathcal{A}, u_l, b)$ :

(1) Glätte  $\nu_1$  mal:  $u_l := \mathcal{S}_l^{\nu_1} u_l$ .

(2) Finde  $c_{l-1} \in U_{l-1} \subset U_l$ , so dass

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u_l - c_{l-1}, \psi_{l-1}) &= b(\psi_{l-1}), & \forall \psi_{l-1} \in V_{l-1}, \\ \Leftrightarrow \mathcal{A}(c_{l-1}, \psi_{l-1}) &= \mathcal{A}(u_l, \psi_{l-1}) - b(\psi_{l-1}) =: d(\psi_{l-1}), & \forall \psi_{l-1} \in V_{l-1}, \\ & & \text{(GGK)} \end{aligned}$$

annäherungsweise gelöst wird und setze  $u_l := u_l + c_{l-1}$ .

Für  $l = 0$ : Löse (GGK) exakt.

Für  $l > 0$ : Löse (GGK) approximativ:

Setze  $c_{l-1} = 0$  und mache  $\gamma$  Aufrufe von  $\mathbf{MG}_{l-1}(\mathcal{A}, c_{l-1}, d)$ .

(3) Glätte  $\nu_2$  mal:  $u_l := \mathcal{S}_l^{\nu_2} u_l$ .

---

## Algorithm 1 $\mathbf{MG}_l(\mathbf{u}_l, \mathbf{b}_l)$

---

```

if  $l = 0$  then                                     ▷  $l=0$ : Basislevel
    return  $\mathbf{u}_0 := \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{b}_0$                        ▷ exakte Lösung
else                                                 ▷  $l > 0$ : rekursive Approximation

    for  $1, \dots, \nu_1$  do  $\mathbf{u}_l := \mathcal{S}_l(\mathbf{u}_l, \mathbf{b}_l)$        ▷  $\nu_1$ -mal Vorglättung

     $\mathbf{d}_{l-1} := \mathbf{R}_l^{l-1}(\mathbf{A}_l \mathbf{u}_l - \mathbf{b}_l)$                 ▷ Restriktion

     $\mathbf{c}_{l-1}^{(0)} = \mathbf{0}$                                        ▷ Grobgitterkorrektur
    for  $k = 1, \dots, \gamma$  do  $\mathbf{c}_{l-1}^{(k)} := \mathbf{MG}_l(\mathbf{c}_{l-1}^{(k-1)}, \mathbf{d}_{l-1})$ 
     $\mathbf{u}_l := \mathbf{u}_l - \mathbf{P}_{l-1}^l \mathbf{c}_{l-1}^{(\gamma)}$ ;                 ▷ Prolongation

    for  $1, \dots, \nu_2$  do  $\mathbf{u}_l := \mathcal{S}_l(\mathbf{u}_l, \mathbf{b}_l)$        ▷  $\nu_2$ -mal Nachglättung

    return  $\mathbf{u}_l$ 
end if

```

---

## 2 Geschachtelte Iteration

Das Mehrgitterverfahren ist zunächst nur ein iteratives Verfahren von fast optimaler Komplexität in folgendem Sinne: Zum einen hat man einen Aufwand pro Mehrgitterschritt der Ordnung  $\mathcal{O}(N_L)$ , wobei  $N_L$  nur die Anzahl der Unbekannten auf dem feinsten Gitterlevel  $\Omega_L$  bezeichnet. Zum anderen ist die Konvergenzrate des Verfahrens  $\rho_{\text{MG}} < 1$  beschränkt und zwar unabhängig von der Gitterweite  $h_L$  oder der Anzahl der Gitterlevel  $L$ . Hieraus folgt natürlich sofort, dass man nur eine konstante Anzahl an Iterationsschritten benötigt, wenn man eine konstante Fehlerreduktion erreichen möchte. Beispielsweise findet man bei Startwert  $\mathbf{u}_L^{(0)} := \mathbf{0}$  eine Abschätzung des relativen Fehlers  $\epsilon$  zur exakten Lösung  $\mathbf{u}_L$  des Gleichungssystems gemäß

$$\|\mathbf{u}_L^{(k)} - \mathbf{u}_L\| \leq \rho_{\text{MG}}^k \|\mathbf{u}_L^{(0)} - \mathbf{u}_L\| \quad \Rightarrow \quad \epsilon := \frac{\|\mathbf{u}_L^{(k)} - \mathbf{u}_L\|}{\|\mathbf{u}_L\|} \leq \rho_{\text{MG}}^k$$

und somit die Anzahl der nötigen Schritte  $\hat{k}$  als

$$\log(\epsilon) \approx \hat{k} \log(\rho_{\text{MG}}) \quad \Rightarrow \quad \hat{k} \approx \frac{\log(\epsilon)}{\log(\rho_{\text{MG}})}.$$

Ist nun die gewünschte Fehlerreduktion konstant, so ist dies auch die Anzahl der Schritte und man erhält ein Verfahren mit optimalem Aufwand  $\hat{k} \cdot \mathcal{O}(N_L) = \mathcal{O}(N_L)$ .

Jedoch ist die Fehlerreduktion bis auf eine fest vorgeschriebene Fehlergröße (z.B. bis auf Rundungsfehlergenauigkeit) im Kontext von diskretisierten partiellen Differentialgleichungen nicht sinnvoll. Vielmehr wird man hier nicht genauer als den Diskretisierungsfehler selbst lösen wollen. Man ist an Ende der Rechnungen stets an der Approximation der kontinuierlichen Lösung  $\mathbf{u}$  interessiert und diese setzt sich zusammen aus dem Fehler der Diskretisierung und dem Fehler der Lösung des diskreten linearen Gleichungssystems,

$$\|\mathbf{u}_L^{(k)} - \mathbf{u}\| \leq \underbrace{\|\mathbf{u}_L^{(k)} - \mathbf{u}_L\|}_{\text{Fehler lineare Iteration}} + \underbrace{\|\mathbf{u}_L - \mathbf{u}\|}_{\text{Diskretisierungsfehler}}.$$

Für den Diskretisierungsfehler sind nun aber entweder Fehlerschätzer vorhanden oder zumindest ist a priori die asymptotische Fehlerentwicklung bzgl. der Gitterweite bekannt. Man möchte daher den Fehler nur bis auf diese Größenordnung

$$\|\mathbf{u}_L^{(k)} - \mathbf{u}_L\| \stackrel{!}{\approx} \|\mathbf{u}_L - \mathbf{u}\| \leq C_{\text{disc}} h_L^p \|f\|$$

lösen. Intuitiv bedeutet dies, dass man auf feineren Gittern eine höhere Genauigkeit erreichen möchte. Dazu benötigt man jedoch mehr Mehrgitterschritte und findet formal

$$\hat{k} = \mathcal{O}(\log(\epsilon)) = \mathcal{O}(\log(h_L^p)) = \mathcal{O}(\log(N_L^{-p/d})) = \mathcal{O}(\log(N_L))$$

und somit einen Aufwand zum Lösen bis auf den Diskretisierungsfehler von  $\mathcal{O}(N_L \log(N_L))$ . Damit ist das Gesamtverfahren nur noch fast optimal und man möchte gerne den logarithmischen Faktor vermeiden.

Möglich wird dies durch die *geschachtelte Iteration* (engl.: *nested iteration*, auch: *full multigrid method*). Die Idee ist dabei, dass die geeignete Wahl des Startwerts die Iteration deutlich verkürzen kann. Um nun geeignete Startwerte zu ermitteln, kann man die Mehrgitterstruktur ausnutzen und die Tatsache, dass sich zwei Lösungen auf unterschiedlichen Gitterleveln nicht viel unterscheiden  $\|\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_{L-1}\| \leq \|\mathbf{u}_L - \mathbf{u}\| + \|\mathbf{u}_{L-1} - \mathbf{u}\| \approx Ch_L^p \|f\|$ . Es bietet sich also an, auf einem groben Gitter mit der Berechnung zu starten - dieses bis auf den Diskretisierungsgenauigkeit zu lösen - und die so ermittelte Lösung als Startwert für das Iterationsverfahren auf dem feinen Gitterlevel zu verwenden. Dieses Vorgehen kann man vom Grobgitter bis zum feinsten Gitterlevel anwenden. Insgesamt erhält man den Algorithmus für die geschachtelte Iteration wie in Algorithmus 2 angegeben. Dabei arbeitet man sich in der Mehrgitterhierarchie nach oben und ermittelt auf jedem Level eine Lösung bis auf Diskretisierungsgenauigkeit. Dazu werden zunächst formal auf jedem Level unterschiedlich viele Mehrgitterschritte  $\hat{k}_l, 1 \leq l \leq L$ , zugelassen. Diese Anzahl darf natürlich nicht wiederum vom zu erreichenden Fehler abhängen - in dem Fall hätte man dasselbe Problem wie schon vorher. Es zeigt sich jedoch, dass man für die Anzahl an Mehrgitterschritten auf jedem Level eine feste Anzahl an Schritten unabhängig vom Gitterlevel wählen kann - typischer Weise ein bis zwei Mehrgitterzyklen auf jedem Level.

**Satz 1** (Geschachteltes Mehrgitter)

Zu den exakten diskreten Lösungen  $\mathbf{u}_l := \mathbf{A}_l^{-1} \mathbf{b}_l, 0 \leq l \leq L$ , sei der *relative Diskretisierungsfehler* a priori beschränkt durch

$$\|P_{l-1}^l \mathbf{u}_{l-1} - \mathbf{u}_l\| \leq C_{\text{rel}} h_l^p, \quad 1 \leq l \leq L,$$

mit der Konsistenzordnung der Diskretisierung  $p$ . Zudem sei

$$\begin{aligned} \rho &:= \max_{1 \leq l \leq L} \rho_{\text{MG},l} && \text{die maximale Konvergenzrate des Mehrgitterverfahrens,} \\ \tau &:= \max_{1 \leq l \leq L} \left( \frac{h_{l-1}}{h_l} \right) && \text{der maximale Zuwachs der Gitterweite bei Vergrößerung,} \\ \|P\| &:= \max_{1 \leq l \leq L} \|P_{l-1}^l\| && \text{die maximale Operatornorm der Prolongation.} \end{aligned}$$

---

**Algorithm 2** Geschachteltes Mehrgitter

---

$\tilde{\mathbf{u}}_0 := \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{b}_0$  ▷ Lösung Level 0

**for**  $l = 1, \dots, L$  **do**

$\mathbf{u}_l^{(0)} := P_{l-1}^l \tilde{\mathbf{u}}_{l-1}$  ▷ Prolongation

**for**  $k = 1, \dots, \hat{k}_l$  **do** ▷ MG-Iteration

$\mathbf{u}_l^{(k)} := \text{MG}_l(\mathbf{u}_l^{(k-1)}, \mathbf{b}_l)$  ▷ z.B. bis  $\|\mathbf{u}_l^{(\hat{k}_l)} - \mathbf{u}_l\| \leq C_{\text{disc}} h_l^p$

**end for**

$\tilde{\mathbf{u}}_l := \mathbf{u}_l^{(\hat{k}_l)}$  ▷ Lösung Level  $l$

**end for**

---

Gibt es ein  $\hat{k} \in \mathbb{N}$ , so dass gilt

$$\|P\| \tau^p \rho^{\hat{k}} \leq 1,$$

dann gilt für die Approximationen in der geschachtelten Iteration mit  $\hat{k}_l := \hat{k}$  konstant vielen Schritten auf jedem Level die Fehlerabschätzung

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_l - \mathbf{u}_l\| \leq \frac{\rho^{\hat{k}}}{1 - \|P\| \tau^p \rho^{\hat{k}}} C_{\text{rel}} h_l^p, \quad 1 \leq l \leq L,$$

d.h. der Fehler zwischen der Approximation in der geschachtelten Iteration und der exakten diskreten Lösung ist (bis auf einen konstanten Faktor) von der Größe des relativen Diskretisierungsfehlers.

**Beweis.** Für Level  $l = 0$  ist  $\tilde{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{u}_0 = \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{b}_0$  und damit gilt die Abschätzung direkt. Für die weiteren Gitterlevel schließt man induktiv unter der

Beachtung von  $\mathbf{u}_l^{(0)} := P_{l-1}^l \tilde{\mathbf{u}}_{l-1}$  durch

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\mathbf{u}}_l - \mathbf{u}_l\| &= \|\mathbf{u}_l^{(\hat{k})} - \mathbf{u}_l\| \leq \rho^{\hat{k}} \|\mathbf{u}_l^{(0)} - \mathbf{u}_l\| \\
&= \rho^{\hat{k}} \|P_{l-1}^l \tilde{\mathbf{u}}_{l-1} - \mathbf{u}_l\| = \rho^{\hat{k}} \|P_{l-1}^l \tilde{\mathbf{u}}_{l-1} - P_{l-1}^l \mathbf{u}_{l-1} + P_{l-1}^l \mathbf{u}_{l-1} - \mathbf{u}_l\| \\
&\leq \rho^{\hat{k}} (\|P_{l-1}^l\| \|\tilde{\mathbf{u}}_{l-1} - \mathbf{u}_{l-1}\| + \|P_{l-1}^l \mathbf{u}_{l-1} - \mathbf{u}_l\|) \\
&\leq \rho^{\hat{k}} \left( \|P\| \frac{\rho^{\hat{k}}}{1 - \|P\| \tau^p \rho^{\hat{k}}} C_{\text{rel}} h_{l-1}^p + C_{\text{rel}} h_l^p \right) \\
&\leq \rho^{\hat{k}} \left( \frac{\|P\| \tau^p \rho^{\hat{k}}}{1 - \|P\| \tau^p \rho^{\hat{k}}} + 1 \right) C_{\text{rel}} h_l^p \\
&= \frac{\rho^{\hat{k}}}{1 - \|P\| \tau^p \rho^{\hat{k}}} C_{\text{rel}} h_l^p.
\end{aligned}$$

□

Wesentlich für den Beweis ist die gleichmäßig Beschränktheit der Konvergenzrate im Mehrgitterverfahren, denn nur damit ist die Definition von  $\rho$  erst überhaupt möglich. Ein typischer Fall in der Praxis ist  $\|P\| = 1, p = 2$  und  $\tau = 2$ . Dann reicht schon ein Schritt  $\hat{k} = 1$  aus, sobald  $\rho < \frac{1}{4}$  ist; für  $\rho < \frac{1}{2}$  ist noch  $\hat{k} = 2$  ausreichend.

Zudem lässt sich der relative Diskretisierungsfehler durch den Diskretisierungsfehler abschätzen. Man erhält dabei

$$\begin{aligned}
\|P_{l-1}^l \mathbf{u}_{l-1} - \mathbf{u}_l\| &\approx \|\mathbf{u}_{l-1} - \mathbf{u}_l\|_{L^2(\Omega)} = \|\mathbf{u}_{l-1} - \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{u}_l - \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_{\text{disc}} h_{l-1}^p + C_{\text{disc}} h_l^p \leq (\tau^p + 1) C_{\text{disc}} h_l^p
\end{aligned}$$

Führt man also für obiges Beispiel die geschachtelte Iteration für  $\hat{k} = 1$  durch und nimmt eine Mehrgitterkonvergenz  $\rho = \frac{1}{6}$  an, so erhält man auf dem feinsten Gitter den Diskretisierungsfehler bis auf den Faktor

$$(\tau^p + 1) \frac{\rho^{\hat{k}}}{1 - \|P\| \tau^p \rho^{\hat{k}}} = (2^2 + 1) \frac{\frac{1}{6}}{1 - 2^2 \frac{1}{6}} = \frac{5}{2}.$$

Führt man anschließend noch einen Mehrgitterzyklus durch, dann drückt dies den Fehler unter das  $\frac{1}{2}$ -fache des Diskretisierungsfehlers.

**Satz 2** (Aufwand der geschachtelten Iteration)

Sei  $W_{\text{MGL}} := \mathcal{O}(N_L)$  der lineare Aufwand eines Mehrgitterzyklus und die Vergrößerung der Freiheitsgrade gegeben als  $\kappa := \max_{1 \leq l \leq L} \frac{N_{l-1}}{N_l} < 1$ . Dann

benötigt die geschachtelte Iteration mit  $\hat{k}$  MG-Schritten pro Gitterlevel einen Aufwand von

$$W_{\text{nested-MG}_L} \leq \frac{\hat{k}}{1 - \kappa} W_{\text{MG}_L}.$$

**Beweis.** Der Mehrgitteraufwand sei  $W_{\text{MG}_l} := C_{\text{MG}} N_l$ . Für den Aufwand der geschachtelten Iteration findet man (unter Vernachlässigung der Grobgitterlösung und der Prolongation)

$$\begin{aligned} W_{\text{nested-MG}_L} &= \hat{k} W_{\text{MG}_1} + \hat{k} W_{\text{MG}_2} + \cdots + \hat{k} W_{\text{MG}_L} = \hat{k} C_{\text{MG}} (N_1 + N_2 + \cdots + N_L) \\ &\leq \hat{k} C_{\text{MG}} N_L (\kappa^L + \kappa^{L-1} + \cdots + 1) \leq \frac{\hat{k}}{1 - \kappa} C_{\text{MG}} N_L. \end{aligned}$$

□

Typischer Weise ist  $\kappa = \frac{1}{2^d}$  und somit ist der Aufwand der geschachtelten Iteration bei einem Mehrgitterschritt pro Level nur das  $\frac{4}{3}$ -fach (2d) bzw.  $\frac{8}{7}$ -fache (3d) eines einzigen Mehrgitterschritts auf dem feinsten Level  $L$ .

### Korollar 3

Das geschachtelte Mehrgitterverfahren berechnet eine Approximation der diskreten Lösung auf dem feinsten Gitterlevel  $\Omega_L$  bis auf einen Fehler in der Größenordnung der Diskretisierungsgenauigkeit  $\mathcal{O}(h_L^p)$  mit einem Aufwand von  $\mathcal{O}(N_L)$ .

## 3 Nichtlineares Mehrgitterverfahren

Es soll die nichtlineare Gleichung

$$\mathcal{A}_l(\mathbf{u}_l) = \mathbf{b}_l, \quad \mathcal{A} : \mathbb{R}^{N_l} \rightarrow \mathbb{R}^{N_l}$$

gelöst werden. Diese Gleichung kann natürlich keine oder aber auch mehrere Lösungen haben. Im Folgenden sei daher angenommen, dass eine Lösung  $\mathbf{u}_l^*$  existiert.

Für das Iterative Verfahren wird es zudem wichtig sein, dass auch noch zu leicht gestörter rechten Seite  $\mathbf{b}_l + \boldsymbol{\epsilon}$  eine Lösung existiert. Dies kann mittels des Satz von der Umkehrfunktion garantiert werden.

### Satz 4 (Satz von der Umkehrfunktion)

Sei  $\mathcal{A}_l : \mathbb{R}^{N_l} \rightarrow \mathbb{R}^{N_l}$  stetig differenzierbar in einer Umgebung  $U$  einer Lösung  $\mathbf{u}_l^* = \mathcal{A}_l^{-1}(\mathbf{b}_l)$  und die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}_{\mathcal{A}_l}(\mathbf{u}_l^*)$  am Punkt der Lösung nicht-singulär. Dann existiert eine Umgebung  $U_l \subset U \subset \mathbb{R}^{N_l}$  von  $\mathbf{u}_l^*$  und eine

Umgebung  $V_l \subset \mathbb{R}^{N_l}$  von  $\mathbf{b}_l$ , so dass die Abbildung  $\mathcal{A}_l : U_l \rightarrow V_l$  einen Bijektion mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung  $\mathcal{A}_l^{-1} : V_l \rightarrow U_l$  ist und für die Jacobi-Matrizen die Beziehung

$$\mathbf{J}_{\mathcal{A}_l^{-1}}(\mathbf{b}_l) = [\mathbf{J}_{\mathcal{A}_l}(\mathcal{A}_l^{-1}(\mathbf{b}_l))]^{-1}$$

gilt.

Somit ist die Existenz einer Lösung  $\mathbf{u}_l = \mathcal{A}_l^{-1}(\mathbf{b}_l + \boldsymbol{\epsilon})$  für  $\boldsymbol{\epsilon}$  hinreichend klein garantiert.

Die Mehrgitter-Philosophie wird im nichtlinearen Mehrgitterverfahren direkt auf die nichtlineare Gleichung angewendet. Dies bedeutet, dass Glättung und Grobgitterkorrektur in gewohnter Reihenfolge durchgeführt werden, nun jedoch diese einzelnen Komponenten auf die nichtlineare Gleichung angewendet werden. Dazu benötigt man nichtlinear Glätter und entsprechende Modifikationen der Grobgitterkorrektur.

### 3.1 Nichtlineare Glätter

Für eine Matrix  $\mathbf{A} := \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U}$  lässt sich die Gleichung  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$  iterativ mit dem Jacobi- und Gauß-Seidel-Glätter behandeln und erhält im linearen Fall die Darstellung

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} - \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{u}^{(k-1)} - \mathbf{b}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}\mathbf{u}^{(k)} + (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{u}^{(k-1)} = \mathbf{b}$$

für Jacobi bzw.

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} - (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{u}^{(k-1)} - \mathbf{b}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{L}\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{U}\mathbf{u}^{(k-1)} = \mathbf{b}$$

für Gauß-Seidel. Dies wird zeilenweise bearbeitet und man findet

$$u_i^{(k)} := \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N a_{ij} u_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \dots, N,$$

bzw.

$$u_i^{(k)} := \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^N a_{ij} u_j^{(k-1)} \right), \quad i = 1, \dots, N.$$

Dies zeigt: Bei diesen Glättern wird lokal (d.h. für jedes  $i$ ) der Wert der nächsten Iteration von  $\mathbf{u}_i^{(k)}$  so bestimmt, dass die Gleichung  $(\mathbf{A}\mathbf{u})_i = \mathbf{b}_i$  gelöst wird, wenn man dabei die Werte der Nachbarn von  $i$  (d.h. die  $\mathbf{u}_j, j \neq i$ ) als korrekt annimmt. Man löst folglich nur nach der Unbekannten  $\mathbf{u}_i$  und hält die anderen Werte von  $\mathbf{u}_j, j \neq i$  konstant.

Für den nichtlinearen Fall kann man dieses Vorgehen übertragen. Dazu läuft man ebenfalls über die einzelnen Gleichungen  $\mathcal{A}_i(\mathbf{u}) = \mathbf{b}_i, i = 1, \dots, N$ , hält alle bis auf die Unbekannte  $\mathbf{u}_i$  konstant und löst die Gleichung nach  $\mathbf{u}_i$  auf. Dies erfordert im Allgemeinen das Lösen einer nichtlinearen Gleichung  $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ . Dazu kann man das Newton-Verfahren, eine Fixpunkt Iteration oder auch nur jeweils ein paar Schritte davon verwenden.

Konkret sind die nichtlinearen Jacobi- und Gauß-Seidel-Glätter definiert als

---

**Algorithm 3 NLJac**( $\mathbf{u}^{(k-1)}, \mathbf{b}$ ) (Nichtlinearer Jacobi)

---

```

for  $1, \dots, N$  do
  Finde Lösung  $x$  von:  $\mathcal{A}_i(\mathbf{u}_1^{(k-1)}, \dots, \mathbf{u}_{i-1}^{(k-1)}, x, \mathbf{u}_{i+1}^{(k-1)}, \dots, \mathbf{u}_N^{(k-1)}) = \mathbf{b}_i$ 
   $\mathbf{u}_i^{(k)} := (1 - \omega) \mathbf{u}_i^{(k-1)} + \omega x$ 
end for
return  $\mathbf{u}^{(k)}$ 

```

---



---

**Algorithm 4 NLGS**( $\mathbf{u}^{(k-1)}, \mathbf{b}$ ) (Nichtlinearer Gauß-Seidel)

---

```

for  $1, \dots, N$  do
  Finde Lösung  $x$  von:  $\mathcal{A}_i(\mathbf{u}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{u}_{i-1}^{(k)}, x, \mathbf{u}_{i+1}^{(k-1)}, \dots, \mathbf{u}_N^{(k-1)}) = \mathbf{b}_i$ 
   $\mathbf{u}_i^{(k)} := x$ 
end for
return  $\mathbf{u}^{(k)}$ 

```

---

Ähnliche Verfahren (Rückwärts-Gauß-Seidel, SOR) übertragen sich analog.

### 3.2 Nichtlineare Grobgitterkorrektur

Hat man die Lösung  $\mathbf{u}_l$  einige Male geglättet, so muss gemäß der Mehrgitteridee nun eine Grobgitterkorrektur gesucht werden. Dabei sucht man eine Korrektur  $\mathbf{c}_{l-1}$  der Form

$$\mathcal{A}_l(\mathbf{u}_l - \mathcal{P}_{l-1}^l \mathbf{c}_{l-1}) \approx \mathbf{b}_l$$

Die idealerweise gewünschte Korrektur ist dabei natürlich gegeben durch

$$\mathcal{A}_l(\mathbf{u}_l - \mathbf{c}_l^{\text{ideal}}) = \mathbf{b}_l.$$



Entwickelt man diese für kleine Defekte

$$\mathbf{d}_l := \mathcal{A}(\mathbf{u}_l) - \mathbf{b}_l$$

und beachtet den Satz von der Umkehrfunktion, so findet man

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_l^{\text{ideal}} &= \mathbf{u}_l - (\mathbf{u}_l - \mathbf{c}_l^{\text{ideal}}) = \mathcal{A}_l^{-1}(\mathbf{d}_l + \mathbf{b}_l) - \mathcal{A}_l^{-1}(\mathbf{b}_l) \\ &= \left[ \mathcal{A}_l^{-1}(\mathbf{b}_l) + \mathbf{J}_{\mathcal{A}_l^{-1}}(\mathbf{b}_l) \cdot (\mathbf{d}_l + \mathbf{b}_l - \mathbf{b}_l) + o(\|\mathbf{d}_l\|) \right] - \mathcal{A}_l^{-1}(\mathbf{b}_l) \\ &= \mathbf{J}_{\mathcal{A}_l^{-1}}(\mathbf{b}_l) \cdot \mathbf{d}_l + o(\|\mathbf{d}_l\|) \\ &= [\mathbf{J}_{\mathcal{A}_l}(\mathcal{A}_l^{-1}(\mathbf{b}_l))]^{-1} \cdot \mathbf{d}_l + o(\|\mathbf{d}_l\|). \end{aligned}$$

Diese Korrektur soll nun mittels des groben Gitters angenähert werden. Gemäß der Mehrgitter-Philosophie ist man versucht analog zum linearen Fall

$$\mathbf{c}_l := \mathbf{P}_{l-1}^l \mathcal{A}_{l-1}^{-1}(\mathbf{R}_l^{l-1} \mathbf{d}_l)$$

zu wählen. Dies ist jedoch keine gute Wahl, denn damit wäre sogar die exakte Lösung kein Fixpunkt der Iteration. Ist nämlich  $\mathbf{d}_l = \mathbf{0}$  so ist zwar oftmals auch  $\mathbf{R}_l^{l-1} \mathbf{d}_l = \mathbf{0}$ , jedoch muss (im Gegensatz zum linearen Fall) die Lösung der Grobgittergleichung im Allgemeinen nicht Null sein, d.h. es gilt  $\mathbf{c}_{l-1} := \mathcal{A}_{l-1}^{-1}(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$ , und die Prolongation würde eine Korrektur  $\mathbf{c}_l := \mathbf{P}_{l-1}^l \mathbf{c}_{l-1} \neq \mathbf{0}$  liefern - trotz exakter Lösung. Zudem stellt sich - wie bei nichtlinearen Problemen üblich - die Frage der Lösbarkeit des Grobgitterproblems. Denn nur wenn das Bild  $\mathbf{d}_{l-1}$  hinreichend nahe an dem Bild einer Lösung  $\tilde{\mathbf{u}}_{l-1}$  liegt (d.h.  $\mathbf{d}_{l-1} \approx \mathcal{A}_{l-1}(\tilde{\mathbf{u}}_{l-1})$ ), dann lässt über den Satz von den Umkehrfunktion die Invertierbarkeit der Abbildung garantieren.

Es empfiehlt sich daher ein alternatives Vorgehen: zu einer geeigneten Approximation der Lösung auf dem groben Gitter  $\tilde{\mathbf{u}}_{l-1}$  (z.B. aus einer geschachtelten Iteration oder durch Restriktion vom feinen Gitter) berechnet man den groben Defekt und die Grobgitterkorrektur als

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{l-1} &:= \mathcal{A}_{l-1}(\tilde{\mathbf{u}}_{l-1}) - s \mathbf{R}_l^{l-1} \mathbf{d}_l, \\ \mathbf{c}_{l-1} &:= \mathcal{A}_{l-1}^{-1}(\mathbf{d}_{l-1}), \\ \mathbf{c}_l &:= \frac{1}{s} \mathbf{P}_{l-1}^l (\tilde{\mathbf{u}}_{l-1} - \mathbf{c}_{l-1}). \end{aligned}$$

Damit liegt - für kleine Defekte  $s \mathbf{R}_l^{l-1} \mathbf{d}_l$  - der grobe Defekt  $\mathbf{d}_{l-1}$  nahe am geeigneten Wert  $\mathcal{A}_{l-1}(\tilde{\mathbf{u}}_{l-1})$ , so dass  $\mathcal{A}_{l-1}^{-1}(\mathbf{d}_{l-1})$  berechenbar ist. Dazu darf der Skalierungsfaktor  $s \in \mathbb{R}$  geeignet klein gewählt werden. Entwickelt man

diese Korrektur für kleinen Defekt, so findet man

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_{l-1} &= \mathcal{A}_{l-1}^{-1}(\mathcal{A}_{l-1}(\tilde{\mathbf{u}}_{l-1}) - s\mathbf{R}_l^{l-1}\mathbf{d}_l) \\
&= \mathcal{A}_{l-1}^{-1}(\mathcal{A}_{l-1}(\tilde{\mathbf{u}}_{l-1})) - \mathbf{J}_{\mathcal{A}_{l-1}^{-1}}(\mathcal{A}_{l-1}(\tilde{\mathbf{u}}_{l-1})) \cdot s\mathbf{R}_l^{l-1}\mathbf{d}_l + o(\|s\mathbf{R}_l^{l-1}\mathbf{d}_l\|) \\
&= \tilde{\mathbf{u}}_{l-1} - [\mathbf{J}_{\mathcal{A}_{l-1}}(\tilde{\mathbf{u}}_{l-1})]^{-1} \cdot s\mathbf{R}_l^{l-1}\mathbf{d}_l + o(\|s\mathbf{R}_l^{l-1}\mathbf{d}_l\|)
\end{aligned}$$

Für die prolongierte Grobgitterkorrektur ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_l &= \frac{1}{s}\mathbf{P}_{l-1}^l (\tilde{\mathbf{u}}_{l-1} - \mathcal{A}_{l-1}^{-1}(\mathbf{d}_{l-1})) \\
&= \mathbf{P}_{l-1}^l [\mathbf{J}_{\mathcal{A}_{l-1}}(\tilde{\mathbf{u}}_{l-1})]^{-1} \cdot \mathbf{R}_l^{l-1}\mathbf{d}_l + o(\|\mathbf{R}_l^{l-1}\mathbf{d}_l\|).
\end{aligned}$$

Dies stimmt - bis auf Terme höherer Ordnung und die Argumente der Jacobi-Matrix - mit der gesuchten idealen Korrektur überein. Zudem ist nun die exakte Lösung ein Fixpunkt: Gilt  $\mathbf{R}_l^{l-1}\mathbf{d}_l = \mathbf{0}$ , so ist  $\mathbf{d}_{l-1} = \mathcal{A}_{l-1}(\tilde{\mathbf{u}}_{l-1})$  und damit  $\tilde{\mathbf{u}}_{l-1}$  eine Lösung von  $\mathcal{A}_{l-1}(\mathbf{c}_{l-1}) = \mathbf{d}_{l-1}$ . Die Grobgitterkorrektur ist somit  $\mathbf{c}_l = \frac{1}{s}\mathbf{P}_{l-1}^l(\tilde{\mathbf{u}}_{l-1} - \mathbf{c}_{l-1}) = \mathbf{0}$  wie gewünscht Null.

Gemäß dem Mehrgitteransatz wird man nun die Grobgittergleichung

$$\mathcal{A}_{l-1}(\mathbf{c}_{l-1}) = \mathbf{d}_{l-1}$$

nicht exakt lösen, sondern rekursiv ebenfalls mit ein paar Mehrgitterschritten. Als Startwert muss hier ein Wert im Einzugsbereich einer Lösung gewählt werden. Unter der Annahme, dass  $\mathbf{R}_l^{l-1}\mathbf{d}_l$  klein ist, bietet sich  $\tilde{\mathbf{u}}_{l-1}$  an.

Im nichtlinearen Algorithmus 5 stellt sich zum einen die Frage, wie die Lösung auf dem Basislevel  $\mathbf{u}_0 := \mathcal{A}_0^{-1}(\mathbf{b}_0)$  berechnet werden soll. Es bietet sich hier an, ein paar nichtlineare Glättungsschritte durchzuführen.

Zum anderen muss die Wahl von  $\tilde{\mathbf{u}}_{l-1}$  und  $s \in \mathbb{R}$  getroffen werden. Es haben sich zwei Arten etabliert:

- (i) Verwendet man das Verfahren im Rahmen einer geschachtelten Iteration, so hat man eine gute Approximation  $\tilde{\mathbf{u}}_{l-1}$  bereits auf den groben Gitter berechnet. Als Wahl für den Skalierungsparameter wählt man  $s \sim \frac{1}{\|\mathbf{d}_l\|}$ , um einen geeigneten Einzugsbereich zu erhalten. In diesem Fall muss man  $\mathcal{A}_{l-1}(\tilde{\mathbf{u}}_{l-1})$  nur ein Mal auswerten, da  $\tilde{\mathbf{u}}_{l-1}$  im weiteren Verlauf konstant bleibt.
- (ii) Man kann  $\tilde{\mathbf{u}}_{l-1} := \mathbf{R}_l^{l-1}\mathbf{u}_l$  als Restriktion der aktuellen Iterierten wählen und  $s = 1$  setzen. In diesem Fall ist man nicht auf die geschachtelte Iteration angewiesen, jedoch muss man  $\mathcal{A}_{l-1}(\tilde{\mathbf{u}}_{l-1})$  in jeder Iteration auswerten. Dieses Schema ist als FAS (*Full Approximation Scheme*) von Brandt bekannt.

---

**Algorithm 5**  $\text{NLMG}_l(\mathbf{u}_l, \mathbf{b}_l)$ 

---

**if**  $l = 0$  **then** ▷  $l=0$ : Basislevel  
    **return**  $\mathbf{u}_0 := \mathcal{A}_0^{-1}(\mathbf{b}_0)$  ▷ exakte Lösung

**else** ▷  $l > 0$ : rekursive Approximation

**for**  $1, \dots, \nu_1$  **do**  $\mathbf{u}_l := \mathcal{S}_l(\mathbf{u}_l, \mathbf{b}_l)$  ▷  $\nu_1$ -mal Vorglättung

    Wähle geeignet:  $s \in \mathbb{R}, \tilde{\mathbf{u}}_{l-1}$   
     $\mathbf{d}_{l-1} := \mathcal{A}_{l-1}(\tilde{\mathbf{u}}_{l-1}) - s\mathbf{R}_l^{l-1}(\mathcal{A}_l(\mathbf{u}_l) - \mathbf{b}_l)$  ▷ Restriktion

$\mathbf{c}_{l-1}^{(0)} = \tilde{\mathbf{u}}_{l-1}$  ▷ Grobgitterkorrektur  
    **for**  $k = 1, \dots, \gamma$  **do**  $\mathbf{c}_{l-1}^{(k)} := \text{NLMG}_l(\mathbf{c}_{l-1}^{(k-1)}, \mathbf{d}_{l-1})$   
     $\mathbf{u}_l := \mathbf{u}_l + \frac{1}{s}\mathbf{P}_{l-1}^l(\tilde{\mathbf{u}}_{l-1} - \mathbf{c}_{l-1}^{(\gamma)})$ ; ▷ Prolongation

**for**  $1, \dots, \nu_2$  **do**  $\mathbf{u}_l := \mathcal{S}_l(\mathbf{u}_l, \mathbf{b}_l)$  ▷  $\nu_2$ -mal Nachglättung

**return**  $\mathbf{u}_l$   
**end if**

---