Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Modellierung und Simulation II

(Praktikum SIM2, SoSe 2017)

M. Breit, Dr. A. Vogel

Blatt 5 (Abgabe: Mo., 12.6.2016, 10h)

Auf diesem Blatt untersuchen Sie die Konvergenzeigenschaften von Glättern und des Mehrgitterverfahrens genauer und vertiefen Ihr Verständnis der Theorie durch experimentelle Untersuchungen.

In allen Aufgaben sollen Sie die 2d-Poissongleichung auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ und der Problemspezifikation

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 4 \quad \text{auf } \Omega, \\ u &= 2 - x^2 - y^2 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

mittels dem Finiten-Differenzen-Verfahren lösen. Beginnen Sie stets mit einem Grobgitter Ω_0 bestehend aus 3×3 Knoten und erzeugen Sie weitere Gitterlevel $\Omega_1, \Omega_2, ...$ durch uniforme Verfeinerung.

Aufgabe 1 (Richardson-Glätter, 4 Punkte)
Implementieren Sie eine Klasse `Richardson`, die die Richardson-Iteration

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \theta(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{u}_k)$$

als Ableitung des Interfaces `IPreconditioner` umsetzt. Der Parameter θ soll dabei frei wählbar sein.
Testen Sie Ihre Implementierung:

(i) Wählen Sie $\theta = \texttt{0.002}$. Für welche der Gitterlevel $1, 2, 3, 4$ ist die lineare Iteration mit dem Richardson-Verfahren konvergent?

(ii) Können Sie das Ergebnis aus (i) erklären? Wie dürfen Sie θ in Abhängigkeit der Gitterweite höchstens wählen, damit Konvergenz garantiert wird? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 (Gedämpftes Jacobi-Verfahren, 4 Punkte)
Erweitern Sie Ihre Klasse `Jacobi`, indem Sie einen Dämpfungsfaktor ω einführen, so dass es sich um das Iterationsverfahren

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \omega\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{u}_k)$$

handelt (mit Default-Wert $\omega = \texttt{1.0}$). Der Parameter ω soll frei wählbar sein. Testen Sie Ihre Implementierung:

(i) Für welche der Dämpfungsfaktoren $\omega = \texttt{2.0, 1.0, 0.5, 0.25}$ ist das gedämpfte Verfahren auf dem Gitterlevel 4 konvergent. Wie lauten die asymptotischen Konvergenzraten?

(ii) Können Sie das Ergebnis aus (i) erklären? Wie dürfen Sie ω in Abhängigkeit der Gitterweite höchstens wählen, damit Konvergenz garantiert wird? Beweisen Sie Ihre Antwort. Wie verhält sich die Konvergenzrate in Abhängigkeit der Gitterweite für $\omega = \texttt{0.5}$?

Aufgabe 3 (Mehrgitter mit Jacobi-Glättung, 4 Punkte)
Lösen Sie obiges Problem mit dem folgenden Mehrgitterverfahren: LU-Löser auf Level 0, 1 Vor- und Nachglättung, V-Zyklus und Jacobi-Glätter.
Testen Sie:

(i) Für ungedämpftes Jacobi $\omega = \texttt{1.0}$: Konvergiert das Verfahren auf Gitterlevel 4 und falls ja, ist die Konvergenzrate zufriedenstellend? Können Sie dies erklären?

(ii) Für gedämpftes Jacobi mit $\omega = \texttt{0.5}$: Konvergiert das Verfahren auf Gitterlevel 4 und falls ja, ist die Konvergenzrate zufriedenstellend? Können Sie dies erklären?

Aufgabe 4 (Zweigitterverfahren, 4 Punkte)
Verwenden Sie im Mehrgitterverfahren einen LU-Basislöser, V-Zyklus, das gedämpfte Jacobi-Glättung mit $\omega = \texttt{0.5}$ und Gitterlevel 4 als feinstes Gitterlevel.
Testen Sie:

(i) Wählen Sie als Basislevel das Level 4. Was beobachten Sie, können Sie dies erklären?

(ii) Wählen Sie das Zweigitterverfahren (d.h. Basislöser auf Level 3). Wie lauten die asymptotischen Konvergenzraten bei den folgenden Anzahlen an Glättungsschritten: $(\nu_1, \nu_2) = \texttt{(1,1), (2,0), (0,2)}$? Inwiefern stimmt dies mit der Theorie überein?

(iii) Wählen Sie das Zweigitterverfahren. Erhöhen Sie die Anzahl der Glättungsschritte: $(\nu_1, \nu_2) = \texttt{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)}$? Wie verhalten sich die asymptotischen Konvergenzraten? Inwiefern stimmt dies mit der Theorie überein?

(iv) Wählen Sie als Glättungsschritte: $(\nu_1, \nu_2) =$ `(3,3)`? Wie lautet die asymptotische Konvergenzrate des Zweigitterverfahrens? Wie lautet die Konvergenzrate des Mehrgitterverfahrens mit Basislevel 0 und V-Zyklus? Stimmt dies mit der Theorie überein?

Aufgabe 5 (V-, F-, W-Zyklus, 4 Punkte)
Implementieren Sie die verschiedenen Zyklusarten für das Mehrgitterverfahren:

(a) Allgemein eine γ-Rekursion für beliebiges $\gamma \geq 1$ (und somit als Spezialfälle auch: V-Zyklus mit $\gamma = 1$, W-Zyklus mit $\gamma = 2$)

(b) F-Zyklus: Dieser ist rekursiv definiert als ein F-Zyklus gefolgt von einem V-Zyklus.

Testen Sie Ihre Implementierung auf Level 5 mit gedämpftem Jacobi-Glätter ($\omega =$ `0.5`), 3 Vor- und Nachglättungsschritten und LU-Basislöser:

(i) Wählen Sie als Basislevel das Level 4. Wie ist die asymptotische Konvergenzrate für V-, F-, W-Zyklus? Warum macht dies Sinn?

(ii) Wählen Sie als Basislevel das Level 0. Wie ist die asymptotische Konvergenzrate für V-, F-, W-Zyklus? Mit Beachtung des Ergebnisses aus (i): Welche Aussage können Sie über die Approximation des Grobgitterproblems mit F- und W-Zyklus treffen, lohnt es sich γ weiter zu erhöhen?

Abgabe: Senden Sie Ihren Code sowie sonstige Antworten als Text, PDF oder Scans bitte per E-Mail an `practical.sim2@gcsc.uni-frankfurt.de`. An diese Adresse können Sie sich auch bei Fragen zu den Aufgaben wenden.