Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Modeling and Simulation I

(Practical SIM1, WS 2017/18)

Dr. A. Nägel, Dr. S. Reiter, Dr. M. Hoffer

Aufgabenblatt 11 (Abgabe: Di., 6.2.2018, 23:59h)

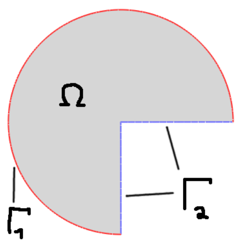
Aufgabe 1 (Adaptivität, 10P (2P+2P+2P+4P))
Mittels Finite Elemente Methode lässt sich das von Blatt 9 bekannte Problem mit Singularität nun auf einer interessanteren Geometrie nachvollziehen.

Es sei

$$\Omega := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1,\ x<0 \text{ oder } y<0\right\}.$$

Es sei außerdem $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ mit

$$\Gamma_1 := \{(x,y) \in \partial\Omega \mid x<0 \text{ oder } y<0\} \text{ und}$$
$$\Gamma_2 := \{(x,y) \in \partial\Omega \mid x=0 \text{ oder } y=0\}.$$



Betrachten Sie auf Ω das folgende Randwertproblem in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} \Delta u(r,\varphi) &= 0 && \text{in } \Omega,\\ u(1,\varphi) &= \sin(\tfrac{2}{3}\theta) && \text{auf } \Gamma_1,\\ u(r,\varphi) &= 0 && \text{auf } \Gamma_2 \end{aligned}$$

Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ lassen sich wie folgt über Polarkoordinaten darstellen:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

mit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{und} \qquad \theta \in [0, 2\pi).$$

Laden Sie sich das Archiv *'sheet11-grids'* von der Homepage herunter (zip oder tar.gz). Berechnen Sie die gesuchte Lösung für die unterschiedlich adaptierten Gitter

a) 'circ-cutout-0.2df', 'circ-cutout-1.2df', 'circ-cutout-2.2df', 'circ-cutout-3.2df'

b) 'circ-cutout-0.2df', 'circ-cutout-1-full.2df' und 'circ-cutout-2-full.2df'.

c) Plotten Sie Ihre Lösungen sowie die Fehler zur exakten Lösung (siehe Blatt 9) für (a) und (b) mittels des ***File2dPlotters*** den Sie über den Link auf der Homepage herunterladen können (als Source-Code für eine neue Groovy-Code Komponente).

d) Erstellen Sie eine Tabelle in der Sie die Maximumsnorm des Fehlers zu den Läufen aus (a) und (b) aufführen. Beschreiben Sie das Konvergenzverhalten und begründen Sie, weshalb sich der Maximumsfehler in den Läufen (a) und (b) bei zugehörigen Verfeinerungsstufen kaum unterscheidet.

Aufgabe 2 (Eigenwerte, 10P (5P+5P))
Im Archiv *'sheet11-grids'* (siehe Homepage) befinden sich u.a. die Gitter

- 'circle.2df'
- 'ring.2df'
- 'round-plus.2df'
- '5-holes.2df'
- 'circ-cutout-2-full.2df'

a) Berechnen Sie zu jedem dieser Gitter den Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert der zugehörigen FE-Matrix (mit Dirichlet-Zeilen) und Plotten Sie diesen mittels ***File2dPlotter*** (siehe Homepage). Nutzen Sie einen randomisierten Startvektor in Ihrer Vektor-/Poweriteration (z.B. jeder Koeffizient wird mittels 'Math.random()' initialisiert).

b) Erstellen Sie mit ***ProMesh*** (www.promesh3d.com) ein eigenes 2-dimensionales Gitter und berechnen Sie darauf den Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert.

Plotten Sie diesen. Geben Sie die erstellte .ugx/.2df als Teil Ihrer Lösung ab. Form und Topologie des Gitters ist Ihnen überlassen. Schön wäre es, wenn Sie einen interessanten Eigenvektor produzieren könnten.
Achten Sie darauf das Gitter nicht zu fein zu machen, da sonst der Berechnungsaufwand zu groß wird (ca 1000 Knoten sollten kein Problem sein).

Anmerkung: Senden Sie den Quelltext als VRL-Studio Projekt (.vrlp Datei) und die Antworten zu den Fragen als E-Mail. Schicken Sie die PDFs/PNG-Dateien, die Sie mit den Plottern erstellt haben, als Anhang mit.
Senden Sie Ihre Lösungen an `practical.sim1@gcsc.uni-frankfurt.de`.
Abgabe bis spätestens Dienstag, 6.2.2018, 23:59h.