Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Modeling and Simulation I

(Practical SIM1, WS 2017/18)

Dr. A. Nägel, Dr. S. Reiter, Dr. M. Hoffer

Aufgabenblatt 9 (Abgabe: Di., 23.1.2018, 23:59h)

Aufgabe 1 (Eigenwerte des diskreten Laplace-Operators, 12P)
In der Vorlesung wurden Eigenwerte und Eigenvektoren für den mittels Fünfpunktstern diskretisierten Laplace-Operator hergeleitet:

Eigenvektoren:

$$u^{\nu\mu}_{ind(i,j)} = \sin(\nu\pi i h) \cdot \sin(\mu\pi j h), \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Eigenwerte:

$$\lambda_{\nu,\mu} = \frac{4}{h^2}\left(\sin^2\left(\frac{\nu\pi h}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\mu\pi h}{2}\right)\right)$$

$1 \leq \mu, \nu \leq n$. Dabei bezeichne $n+1$ die Zahl an Elementen/Quadraten mit denen Ω pro Dimension überdeckt wird (n bezeichnet also die Zahl an inneren Gitterknoten pro Dimension). Außerdem sei

$$ind : \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{N}, \tag{1}$$
$$ind(i, j) := (j-1) \cdot n + (i-1). \tag{2}$$

Berechnen Sie für $\Omega = (0,1)^2$ sowie $n = 9$ und $n = 19$ den größten und den kleinsten Eigenwert sowie zugehörige Eigenvektoren über die Potenzmethode. Nutzen Sie dabei, dass falls A eine invertierbare Matrix ist und λ ein Eigenwert von A, so ist λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1}.

Die Potenzmethode zum Finden des Eigenvektors zu dem betragmäßig größten Eigenwert einer Matrix A ist dabei durch folgende Iteration gegeben:

$$r_{k+1} := \frac{A \cdot r_k}{\|A \cdot r_k\|}$$

Die Iteration soll mit dem Vektor $r_0 := (1, 1, \ldots, 1)$ starten und so lange ausgeführt werden bis $\|r_k - r_{k-1}\| < 10^{-6}$. Plotten Sie die gefundenen Eigenvektoren zu größtem und kleinstem Eigenwert und berechnen Sie die Abweichung zu den theoretisch erwarteten Eigenvektoren (2-Norm). Achten Sie dabei auf geeignete Skalierung der Eigenvektoren. Vergleichen Sie außerdem die gefundenen Eigenwerte mit den theoretisch erwarteten Eigenwerten.

Achten Sie bei Ihrer Implementierung darauf unnötige Allokationen (Benutzung von `new`) zu vermeiden. Stellen Sie außerdem sicher, dass z.B. die LU-Decomposition nicht unnötig oft ausgeführt wird.

Aufgabe 2 (Singularitäten, 8P)
Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ lassen sich wie folgt über Polarkoordinaten darstellen:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

mit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{und} \qquad \theta \in [0, 2\pi).$$

Betrachten Sie auf $\Omega = (0,1)^2$ das folgende Randwertproblem:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u &= r^{\frac{2}{3}} \sin(\frac{2}{3}\theta) && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie: $\varphi(r, \theta) = r^{\frac{2}{3}} \sin(\frac{2}{3}\theta)$ ist die kontinuierliche Lösung des Problems. (Laplace-Operator in Polarkoordinaten: $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$)

(b) Sei N, analog zu Blatt 7, die Zahl an Quadraten mit denen Ω pro Dimension überdeckt ist. Berechnen Sie für $N = 5$, $N = 10$, $N = 20$ und $N = 40$ die diskrete Lösung des Problems mittels Fünfpunktsterndiskretisierung. Plotten Sie berechnete Lösung und Fehler (punktweise Differenz zu exakter Lösung). Geben Sie die jeweilige Maximumsnorm des Fehlers sowie zugehörige Konvergenzraten und Konvergenzordnung an.

    Motivieren Sie aus der Theorie, weshalb man keine Konvergenzordnung von $O(h^2)$ erwarten kann.

Anmerkung: Senden Sie den Quelltext als VRL-Studio Projekt (.vrlp Datei) und die Antworten zu den Fragen als E-Mail. Schicken Sie die PDFs/PNG-Dateien, die Sie mit den Plottern erstellt haben, als Anhang mit.
Senden Sie Ihre Lösungen an `practical.sim1@gcsc.uni-frankfurt.de`.
Abgabe bis spätestens Dienstag, 23.1.2018, 23:59h.