Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Modeling and Simulation I

(Practical SIM1, WS 2017/18)

Dr. A. Nägel, Dr. S. Reiter, Dr. M. Hoffer

Aufgabenblatt 8 (Abgabe: Di., 16.1.2018, 23:59h)

Aufgabe 1 (Wärmeleitungsgleichung 2D, 16P + 4P)
Im Folgenden soll die Wärmeleitungsgleichung mit Quellterm auf $\Omega := (0,1)^2$ betrachtet werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t, \mathbf{x}) - \Delta u(t, \mathbf{x}) &= f && \text{für} \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(t, \mathbf{x}) &= \varphi(\mathbf{x}) && \text{auf dem Rand} \quad \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

mit

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{2}\pi)^{\mathbf{2}}(\sin(\mathbf{2}\pi\mathbf{x_0}) + \sin(\mathbf{2}\pi\mathbf{x_1}))$$

auf Ω, Dirichlet Randbedingungen

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sin(\mathbf{2}\pi\mathbf{x_0}) + \sin(\mathbf{2}\pi\mathbf{x_1})$$

auf $\partial\Omega$, und Startwert

$$u(0, x) = 0 \, \forall x \in \Omega.$$

(a) Analog zur zeitabhängigen Berechnung der 1D Wärmeleitungsgleichung aus Blatt 6 soll nun das zeitabhängige System in 2 Dimensionen mittels implizitem Eulerverfahren gelöst werden. Berechnen Sie für das mittels Fünfpunktstern diskretisierte System Lösungen für die Zeitpunkte $T_0 = 0.01s$, $T_1 = 0.5s$ und $T_2 = 1s$ bei einer Zeitschrittweite von $dt = 0.01s$ und einer Gitterweite von $h = 0.1$. Plotten Sie die jeweiligen Lösungen mithilfe des Matrix-Plotters. Geben Sie außerdem die zugehörigen 2-Normen der jeweiligen Lösungen aus. Kann davon ausgegangen werden, dass bei T_2 der stabile Zustand des Systems gut genähert wird?

(b) Vergleichen Sie die Lösungen zum Zeitpunkt $T = 1s$ für die Gitterweiten $h = 0.1$, $h = 0.05$ und $h = 0.025$ mit der exakten Lösung in der 2-Norm (vergleiche Blatt 7) und begründen Sie das Verhalten.

Anmerkung: Senden Sie den Quelltext als VRL-Studio Projekt (.vrlp Datei) und die Antworten zu den Fragen als E-Mail. Schicken Sie die PDFs/PNG-Dateien, die Sie mit den Plottern erstellt haben, als Anhang mit.
Senden Sie Ihre Lösungen an `practical.sim1@gcsc.uni-frankfurt.de`.
Abgabe bis spätestens Dienstag, 16.1.2018, 23:59h.