Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Modeling and Simulation I

(Practical SIM1, WS 2017/18)

Dr. A. Nägel, Dr. S. Reiter, Dr. M. Hoffer

Aufgabenblatt 7 (Abgabe: Di., 9.1.2018, 23:59h)

In diesem Aufgabenblatt soll die Behandlung der Wärmeleitungsgleichung auf 2 Dimensionen erweitert werden. Dazu soll zunächst eine approximative Lösung zum stationären Fall eines Modellproblems berechnet werden sowie Konvergenzeigenschaften untersucht werden. Hierzu betrachten wir die Wärmeleitungsgleichung in 2 Dimensionen auf dem Einheitsquadrat $\Omega := (0,1)^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u(t,\mathbf{x}) - \Delta u(t,\mathbf{x}) &= 0 && \text{für} \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(t,\mathbf{x}) &= \varphi(\mathbf{x}) && \text{auf dem Rand} \quad \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

mit $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. $t \in \mathbb{R}$ ist dabei als Zeit aufzufassen, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ ist als Ortsvektor $\mathbf{x} = (x_0, x_1)^T$ zu verstehen. Für $t \to \infty$ begibt sich das System in einen stabilen Zustand, so dass $\frac{\partial}{\partial t}u(t,\mathbf{x}) = 0$ gilt.

Das System vereinfacht sich dann zur *Laplace* Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u(\mathbf{x}) &= 0 && \text{für} \quad (x,y) \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= \varphi(\mathbf{x}) && \text{auf dem Rand} \quad \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2}$$

Der Laplaceoperator lässt sich für diesen Fall in 2d wie folgt darstellen:

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}u(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u(\mathbf{x}). \tag{3}$$

Aufgabe 1 (Diskretisierung und stationärer Fall 5P + 3P + 3P)
Zunächst soll das Gebiet $\overline{\Omega}$ durch ein regelmäßiges Gitter aus $N \times N, N \in \mathbb{N}^+$ Quadraten überlagert werden. Es ergibt sich damit eine Gitterweite von $h := 1/N$ und $(N+1)^2 =: M$ Gitterknoten mit Koordinaten $(i * h, j * h)^T \in \mathbb{R}^2, 0 \leq i, j \leq N$. Mittels

$$ind : \{0, 1, \ldots, N\} \times \{0, 1, \ldots, N\} \to \mathbb{N}, \tag{4}$$
$$ind(i, j) := j \cdot (N + 1) + i, \tag{5}$$

lässt sich jedem Gitterknoten ein eindeutiger Index zuordnen. Dies entspricht einer zeilenweisen Durchnummerierung der Knoten, startend bei Koordinate (0, 0) bis hin zur Koordinate (1,1).

Anstatt $u(\mathbf{x})$ betrachten wir nun den diskreten Vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^M$ mit Einträgen $\mathbf{u}_{ind(i,j)} := u((i * h, j * h)^T), 0 \leq i, j \leq N$. Die Anwendung des mittels der Finite Differenzen Methode diskretisierten Laplace-Operators Δ_h auf den Vektor $\mathbf{u}$ lässt sich als Matrix-Vektor Multiplikation auffassen. Sei $A \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M,\ A := \Delta_h$. Für ein festes paar $i, j,\ 0 < i, j < N$ und $k := ind(i, j)$ ergibt sich die Anwendung der k-ten Zeile von A auf $\mathbf{u}$ zu:

$$(A \cdot \mathbf{u})_k = \frac{1}{h^2}\big(4\mathbf{u}_{ind(i,j)} - \mathbf{u}_{ind(i-1,j)} - \mathbf{u}_{ind(i+1,j)} - \mathbf{u}_{ind(i,j-1)} - \mathbf{u}_{ind(i,j+1)}\big) \tag{6}$$

Für $i = 0, j = 0, i = N$ oder $j = N$ enthalte A eine Einheitszeile (1 auf der Diagonale, 0 sonst).

(a) Implementieren Sie eine VRL-Komponente zur Diskretisierung des zweidimensionalen Laplace Operators mittels Fünfpunktstern auf dem Einheitsquadrat, die als Eingabe einen Integer-Wert 'N' erhält (Zahl der Gitterelemente pro Dimension) und als Ausgabe die oben beschriebene Matrix A als `double[][]` Matrix mit $M \times M$ Einträgen liefert.

(b) Implementieren Sie eine VRL-Komponente zur Erstellung des folgenden Vektors:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{ind(i,j)} &:= 0 && \text{für } 0 < i, j < N \\ \mathbf{b}_{ind(i,j)} &:= (i \cdot h) \cdot (j \cdot h) && \text{sonst.} \end{aligned} \tag{7}$$

Die Komponente erhalte als Eingabe ebenfalls einen Integer-Wert 'N' und liefere ein `double[]` Array $\mathbf{b}$ mit M Einträgen.

(c) Berechnen Sie eine Näherung zur Lösung der Laplace-Gleichung zu den vorgegebenen Randwerten ($\varphi(\mathbf{x}) := x_0 \cdot x_1$) für $N \in \{5, 10, 20, 40\}$ mittels der oben aufgestellten Matrix A und der rechten Seite $\mathbf{b}$. Lösen Sie dazu das Gleichungssystem $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ mittels des LU Verfahrens. Plotten Sie die Lösung.

Aufgabe 2 (Konvergenzeigenschaften 1P + 3P + 5P)
Im Folgenden soll die Poisson Gleichung wieder auf $\Omega := (0,1)^2$ betrachtet werden:

$$\begin{aligned} -\Delta u(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) && \text{für} \quad \mathbf{x} \in \boldsymbol{\Omega}, \\ u(\mathbf{x}) &= \varphi(\mathbf{x}) && \text{auf dem Rand} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{8}$$

mit $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{2}\pi)^{\mathbf{2}}(\sin(\mathbf{2}\pi\mathbf{x_0}) + \sin(\mathbf{2}\pi\mathbf{x_1}))$ auf Ω und Dirichlet Randbedingungen $\varphi(\mathbf{x}) = \sin(\mathbf{2}\pi\mathbf{x_0}) + \sin(\mathbf{2}\pi\mathbf{x_1})$ auf $\partial\Omega$.

(a) Zeigen Sie, dass φ die exakte Lösung von Gleichung (8) ist.

(b) Passen Sie Ihre Diskretisierung aus Aufgabe 1 so an, dass die rechte Seite f der Differentialgleichung sowie φ in der rechten Seite b des linearen Systems berücksichtigt werden.

(c) Der Approximationsfehler $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^M$ sei gegeben durch

$$\mathbf{e}_{ind(i,j)} := u(i \cdot h, j \cdot h) - \mathbf{u}_{ind(i,j)}, \quad 0 \leq i, j \leq N. \tag{9}$$

Implementieren Sie eine VRL-Komponente, die den punktweisen Approximationsfehler zwischen exakter und genäherter Lösung berechnet. Die Komponente soll als Eingabe ein `double[]` Array $\mathbf{u}$ akzeptieren und als Ausgabe ein `double[]` Array der gleichen Länge liefern. Dabei kann davon ausgegangen werden, dass für die Länge des Eingabearrays $M := (N+1) \times (N+1)$ gilt.

Erstellen Sie zwei weitere VRL-Komponenten, die die folgenden Vektornormen berechnen:

$$||\mathbf{e}||_\infty := \max_{i=0}^{M-1} |e_i|, \quad (10) \qquad\qquad ||\mathbf{e}||_{\mathbf{2}} := \left(\sum_{i=0}^{M-1} |e_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

Berechnen Sie den Approximationsfehler für $N \in \{5, 10, 20, 40\}$ und plotten Sie ihn mittels des Matrix-Plotters. Berechnen Sie außerdem beide Normen für die berechneten Abweichungen. Decken sich die Konvergenzraten mit Ihren Erwartungen aus der Vorlesung? Begründen Sie Ihre Antwort.

Anmerkung: Senden Sie den Quelltext als VRL-Studio Projekt (.vrlp Datei) und die Antworten zu den Fragen als E-Mail. Schicken Sie die PDFs/PNG-Dateien, die Sie mit den Plottern erstellt haben, als Anhang mit.
Senden Sie Ihre Lösungen an `practical.sim1@gcsc.uni-frankfurt.de`.
Abgabe bis spätestens Dienstag, 9.1.2018, 23:59h.