Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Modeling and Simulation I

(Practical SIM1, WS 2017/18)

Dr. A. Nägel, Dr. S. Reiter, Dr. M. Hoffer

Aufgabenblatt 6 (Abgabe: Di., 19.12.2017, 23:59h)

In den bisherigen Aufgaben haben wir uns ausschließlich mit Problemen beschäftigt, die wir durch eine rein zeitliche Abhängigkeit ausdrücken konnten. Dementsprechend haben wir uns auch nur mit Zeitdiskretisierungen beschäftigt. In der folgenden Aufgabe wollen wir uns mit Probleme beschäftigen, die eine Raumdisketisierung erfordern.
Hierzu betrachten wir die Wärmeleitungsgleichung (siehe Gleichung 2).

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,\mathbf{x}) - \alpha\Delta u(t,\mathbf{x}) = 0 \tag{1}$$

Für den für uns interessanten Fall $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^1$ sieht die Gleichung folgendermaßen aus:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) - \alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) = 0 \tag{2}$$

Um diese Gleichung in unserem bisherigen Framework lösen zu können, müssen wir uns der räumlichen Abhängigkeit entledigen. Hierzu führen wir eine Raumdiskretisierung ein:

$$u(t) = \begin{pmatrix} u(t,\mathbf{x}_1) \\ u(t,\mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ u(t,\mathbf{x}_n) \end{pmatrix} \tag{3}$$

mit

$$\Delta x = \frac{x_n - x_1}{n}, n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

und

$$x_i = i\Delta x, i = 1 \dots n \tag{5}$$

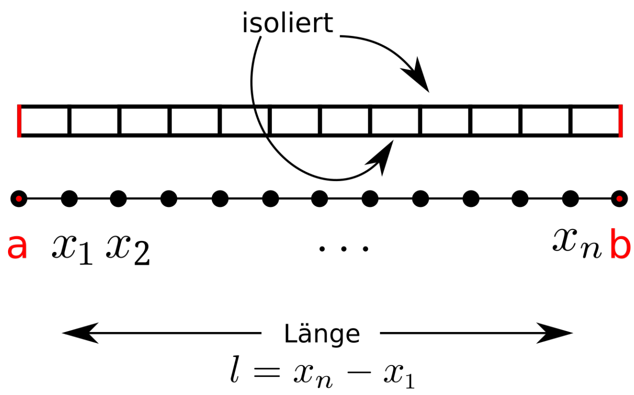
Formulierung als System von gewöhnlichen Differentialgleichungen:
Die zweite Ableitung von $u(t, x)$ lässt sich approximieren durch

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) \approx \frac{u(x-\Delta x, t) - 2u(x,t) + u(x+\Delta x, t)}{\Delta x^2} \tag{6}$$

Damit sieht unsere rechte Seite $f(t)$ folgendermaßen aus:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x^2}(u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + u_{i+1}(t)) & \text{für } 1 < i < n \\ \frac{1}{\Delta x^2}(-2u_i(t) + u_{i+1}(t) + a) & \text{für } i = 1 \\ \frac{1}{\Delta x^2}(u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + b) & \text{für } i = n \end{cases} \tag{7}$$

Wir sind nun in der Lage die 1D-Wärmeleitungsgleichung zu lösen. Die nachfolgende Abbildung (mit Randwerten a und b) zeigt die Diskretisierung einer 1D Geometrie:

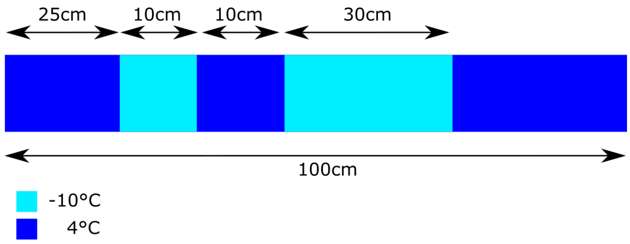


Aufgabe 1 (6P + 5P)
Zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung verwenden wir implizite Verfahren.

(a) Implementieren Sie analog zum Crank-Nicolson-Verfahren das Implizite Eulerverfahren für Systeme von ODEs.

(b) Implementieren Sie eine Diskretisierung der 1D-Wärmeleitungsgleichung (siehe hierzu http://bit.ly/2BBqZxi).

Aufgabe 2 (3P + 2P + 2P + 2P)
Simulieren Sie zwei von Wasser umgebene Eisblöcke mithilfe der oben beschriebenen 1D-Wärmeleitungsgleichung. Die Blöcke und die Temperaturverteilung sind folgendermaßen definiert:



Randwerte: $a = b = 4°C$. Für den Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten von Wasser verwenden wir $\alpha = 0.006 \frac{Watt}{cm * °C}$. Die Tatsache, dass sich die Wärmeleitfähigkeit von Wasser je nach Temperatur ändern kann, wird in dieser Aufgabenstellung ignoriert.

(a) Simulieren Sie obigen Sachverhalt mithilfe des impliziten Eulerverfahrens mit einer Schrittweite von $h = 0.1$ und $TOL = 1e - 4$ mit $t_0 = 0$ und $t_n = 10000$ Sekunden und $n = 30$.

(b) Ermitteln Sie empirisch, ob das Wasser zwischen den Blöcken gefriert, bevor sich die Blöcke auflösen. Falls ja, geben Sie den Zeitpunkt an.

(c) Löst sich der kleinere Block bis zum Zeitpunkt $t = 10000$ auf?

(d) Plotten Sie die Lösungen mit dem bereitgestellten Matrix-Plotter (siehe `http://bit.ly/2BaDRcP` zum Plotten und `http://bit.ly/2BAqL9E` zum Konvertieren von VectorTrajectories zu `double[]`) für $t = 0, t = 1000$ und $t = t_n$.

Aufgabe 3 (4 Zusatzpunkte)
Verwenden Sie den MatrixPlotter und den Video Creator aus VRL-Studio (siehe Manage Components->VRL->Media), um eine Videodatei zu erstellen, die den gesamten Simulationsverlauf zeigt.

Anmerkung: Senden Sie den Quelltext als VRL-Studio Projekt (.vrlp Datei) und die Antworten zu den Fragen als E-Mail. Schicken Sie die PDFs/PNG-Dateien, die Sie mit den Plottern erstellt haben, als Anhang mit.
Senden Sie Ihre Lösungen an `practical.sim1@gcsc.uni-frankfurt.de`.
Abgabe bis spätestens Dienstag, 19.12.2017, 23:59h.