Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Übungen zur Neuro-Bioinformatik

Dr. A. Nägel, Dr. M. Hoffer, J. Wang, M. Huymayer
Wintersemester 2018/19

Aufgabenblatt 05
(Abgabe: 10.12.2018, 16:00 Uhr)

Aufgabe 1. (4 Punkte) Betrachten Sie das FitzHugh-Nagumo-Modell mit den beiden unbekannten Funktionen V und w:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= f_1(V,w), \qquad & f_1(V,w) &:= V(a-V)(V-1) - w + I, \\ \dot{w} &= f_2(V,w), \qquad & f_2(V,w) &:= bV - cw. \end{aligned}$$

Dabei sind $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ und $c \geq 0$.

(a) Berechnen Sie für jede der Gleichungen separat, welche Bedingungen im stationären Zustand erfüllt sein müssen. (Setzen Sie dazu die linke Seite ($\dot{V}$ bzw. $\dot{w}$) gleich 0 und lösen Sie dann jeweils nach der Variablen w auf.

(b) Skizzieren Sie Ihre Ergebnisse aus (a) in einem V-w-Diagramm. Wie viele stationäre Zustände sind (prinzipiell) möglich?

(c) Es sei $(V_0, w_0)^T$ eine Ruhelage. Stellen Sie das im dieser Ruhelage linearisierte System dar. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix

$$Df(V_0, w_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial V} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial V} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \end{pmatrix}$$

(d) Für $I = 0$ ist $(V_0, w_0)^T = 0$ ein stationärer Zustand. Geben Sie an, für welche Wahl von Parametern a, b, c dieser stabil ist.

Aufgabe 2. (14 Punkte) In der Vorlesung wurde gezeigt, wie durch *Extrapolation* aus Verfahren niedriger Ordnung ein Verfahren höherer Ordnung konstruiert werden kann. Die Berechnung einer Lösung zur Schrittweite $\tau > 0$ erfolgte dabei rekursiv über ein Aitken-Neville-Schema:

$$\begin{array}{ccccccc} Y_{11} & & & & & & \\ & \searrow & & & & & \\ Y_{21} & \rightarrow & Y_{22} & & & & \\ & \searrow & & \searrow & & & \\ Y_{31} & \rightarrow & Y_{32} & \rightarrow & Y_{33} & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ Y_{N1} & \rightarrow & & \dots & & \rightarrow & Y_{NN} \end{array}$$

Dabei bezeichnen $Y_{11}, Y_{21}, \dots, Y_{N1}$ vorgegebene Startlösungen. Diese Y_{k1} sollen für $k = 1, \dots, N$ jeweils über ein explizites Eulerverfahren mit k äquidistanten Schritten der Schrittweite $\sigma_k = \tau/k$ realisiert werden. Alle weiteren Lösungen ergeben sich für $2 \leq i \leq N,\ 2 \leq k \leq i$ gemäß der Vorschrift

$$Y_{i,k} := Y_{i,k-1} + \triangle_{i,k-1},$$

wobei

$$\triangle_{i,k-1} := \frac{\sigma_i}{\sigma_{i-k+1} - \sigma_i} \cdot (Y_{i,k-1} - Y_{i-1,k-1}).$$

(a) (4 Punkte) Programmieren Sie ein solches Extrapolationsverfahren für eine beliebige Anzahl von Stufen N. Nutzen Sie dazu das vorgegebene VRL-Studio Projekt.

(b) (2 Punkte) Testen Sie das Verfahren an der (bekannten) Testgleichung:

$$\dot{u}(t) = 1 \cdot u(t),\ u(0) = 1 \tag{1}$$

auf dem Intervall $0 \leq t \leq 1$. Untersuchen Sie dazu den Fehler

$$E_{\text{exakt}} := |u(1) - y(1)|$$

zwischen der analytischen Lösung u und der numerisch berechneten Lösung y an der Stelle $t = 1$. Vervollständigen Sie dazu Tabelle 1.

(c) (2 Punkte) Das Extrapolationsverfahren liefert über die Korrekturen $\triangle_{k,k-1}$

$$e_{\text{subdiag},k} := |\triangle_{k,k-1}| = |Y_{k,k} - Y_{k,k-1}| \tag{2}$$

für $k = 2, \dots, N$ den sog. *subdiagonalen* Fehlerschätzer. Werten Sie diesen zum Zeitpunkt $t = 1$ aus und Sie ergänzen Sie die Werte in Tabelle 1.

(d) (2 Punkte) Lesen Sie aus der Tabelle (durch Bildung von Quotienten) ab, von welcher Ordnung p die Fehler bzw. Fehlerschätzer aus den beiden vorherigen Aufgabenteilen sind.

(e) (4 Punkte) Fügen Sie nun noch eine Schrittweitensteuerung ein. Nutzen Sie dazu den *subdiagonalen* Fehlerschätzer (2). Die Steuerung der Schrittweite erfolgt durch:

$$\tau^* = \left(\rho \frac{TOL}{e_{subdiag,N}}\right)^{\frac{1}{N+1}} \tau$$

Falls $TOL \geq e_{subdiag,N}$ kann der Schritt akzeptiert werden und τ^* ist der Schrittweitenvorschlag für den nächsten Schritt. Falls $TOL < e_{subdiag,N}$, so muss der Schritt (mit Schrittweite $\tau^* < \tau$) wiederholt werden. Testen Sie die Schrittweitensteuerung an der Testgleichung (1) mit $TOL = 10^{-5}$ und $\rho = 0.5$. Speichern Sie die einzelnen Schrittweiten in einer !Trajectory!. Erstellen Sie auch für den Fehlerschätzer eine Trajectory.

Abgabe: Senden Sie Ihren Code sowie sonstige Antworten als Text, PDF, Fotos oder Scans bitte per E-Mail an `practical.sim1@gcsc.uni-frankfurt.de`. An diese Adresse können Sie sich auch bei Fragen zu den Aufgaben wenden.

Tabelle 1: Konvergenzanalyse für das Extrapolationsverfahren aus Aufgabe 2.

Verfahren	$\tau = 1/4$	$\tau = 1/8$	$\tau = 1/16$	$\tau = 1/32$	$\tau = 1/64$	$\tau = 1/128$	$\tau = 1/256$
Expliziter Euler							
Fehler							
Quotient	—						
Extrapolation (N=2)							
Fehler e_{exakt}							
Quotient	—						
Schätzer $e_{\text{subdiag},2}$							
Quotient	—						
Extrapolation (N=3)							
Fehler e_{exakt}							
Quotient	—						
Schätzer $e_{\text{subdiag},3}$							
Quotient	—						