

**5. Übung zur Vorlesung  
Modellierung und Simulation 3**

(WS 2013/14)

Prof. Dr. G. Queisser

Markus Breit, Martin Stepniewski

**Abgabe: Dienstag, 17.12.2013, 12:00 Uhr**

## Aufgaben

**Aufgabe 5.1 (4+2 Punkte)** (*Analytische Lösung der stationären Kabelgleichung*)  
Gegeben sei ein zylinderförmiger Dendrit der Länge  $2L$  mit konstantem Radius  $a$ . Genau auf halber Länge des Dendriten befinde sich eine punktförmige Elektrode, die den Strom  $I_e$  in den Dendriten injiziert.

(i) Berechnen Sie das sich einstellende Membranpotential entlang des Dendriten, indem Sie die stationäre passive (d.h. ohne Kanaldynamik) Kabelgleichung

$$\lambda^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = v - r_m i_e$$

mit den Randbedingungen  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$  an beiden Enden des Dendriten lösen. Zeichnen oder plotten Sie Ihre Lösung zu den Parametern  $r_m = 10 \text{ k}\Omega \text{ cm}^2$ ,  $r_L = 100 \Omega \text{ cm}$ ,  $I_e = 1 \text{ nA}$ ,  $a = 2 \mu\text{m}$  und  $L = 1.5 \text{ mm}$ .

**Tipp:** Gehen Sie am besten wie folgt vor:

1. Setzen Sie die x-Koordinate so, dass die Elektrode bei 0 liegt.
2. Betrachten Sie  $v$  für alle  $x \in (0, L]$ : Schreiben Sie die allgemeine Lösung der dort geltenden (homogenen) DGL mit den Variablen  $B_1$  und  $B_2$  wie im Skript.
3. Stellen Sie eine Gleichung auf, durch die die Flussbedingung am rechten Ende ( $x = L$ ) erfüllt wird.
4. Stellen Sie am anderen Rand die Gleichung  $\frac{\pi a^2}{r_L} \frac{\partial v}{\partial x}(x = 0) = -\frac{I_e}{2}$  auf. Erläutern Sie, warum das eine korrekte Vorgehensweise ist!
5. Bestimmen Sie  $B_1$  und  $B_2$  mithilfe der beiden Gleichungen aus 3. und 4. und geben Sie damit die Lösung für den ganzen Dendriten an.

(ii) Wenn Sie davon ausgehen, dass  $L \gg \lambda$ , können Sie  $\exp\left(-\frac{2L}{\lambda}\right) \approx 0$  abschätzen. In welcher Potenz ist dann die Membranspannung am Injektionspunkt vom Radius  $a$  abhängig?

**Aufgabe 5.2 (2 Punkte + 4 Bonus-Punkte)** (*Asymmetrischer Fall*)

Gegeben sei wieder ein Dendrit, der durch eine punktförmige Elektrode stimuliert werde. Allerdings sei nun die Position der Elektrode nicht in der Mitte des Dendriten, sondern an einem beliebigen Punkt. Dadurch fallen einige Symmetrieannahmen aus 5.1 weg, die die Rechnung dort erheblich vereinfacht haben.

(i) Skizzieren Sie, wie das Membranpotential (im stationären Zustand) in einer solchen Situation qualitativ verlaufen wird, und begründen Sie Ihre Vorhersage.

(ii)\* Lösen Sie die stationäre (passive) Differentialgleichung (mit den gleichen Randbedingungen wie in 5.1) und plotten Sie die Lösung für verschiedene Verhältnisse  $\frac{l}{L}$ .

**Tipp:** Gehen Sie dazu ähnlich wie in Aufgabe 5.1 vor:

1. Legen Sie die Koordinaten diesmal so, dass die Elektrode im Punkt  $x = 0$  liegt, das linke Ende des Dendriten bei  $x = -l$  und das rechte bei  $x = L$ .
2. Betrachten Sie dann die beiden Bereiche  $x \in [-l, 0)$  und  $x \in (0, L]$  mit ihrer jeweiligen Randbedingung an den Enden des Dendriten. Für die Randbedingungen bei  $x = 0$  müssen Sie sich etwas einfallen lassen (der Ansatz aus 5.1, Tipp, 4. funktioniert hier nicht). Stellen Sie ein Gleichungssystem auf.
3. Lösen Sie das Gleichungssystem (einige Rechenarbeit).

**Aufgabe 5.3 (2+2+2+2 Punkte)** (*Einführung in NEURON*)

Das Simulations-Toolkit NEURON<sup>1</sup> verwendet das *Multi-Compartment*-Modell, um Neuronen zu simulieren. Durch Lösen der Kabelgleichung auf der diskretisierten Kompartiment-Geometrie einer Zelle bzw. eines gesamten Netzwerkes ist es damit möglich, im Gegensatz zum *Integrate-and-fire*-Modell auch die räumliche Komponente der Signalübertragung als Parameter zu modellieren.

Die räumliche Auflösung ermöglicht es nun, für jedes Kompartiment die physiologischen Eigenschaften (*passive* Eigenschaften vs. *Hodgkin-Huxley*-Konduktivitäten) der Membran ortsabhängig zu definieren und so das Input- und Output-Verhalten genauer zu untersuchen. Durch unterschiedliche Geometrien des dendritischen Baums und der Lage der Synapsen kann ebenfalls das Input-Verhalten des Neurons spezifiziert werden.

(i) Eignen Sie sich mit Hilfe des NEURON Tutorials<sup>2</sup> A-C die wichtigsten Befehle des Tools an und untersuchen Sie zunächst mit einfachen Simulationen den Zusammenhang zwischen den unterschiedlichen Parametern und dem resultierenden Signalverhalten mit Hilfe geeigneter *Zeit*- und *Raum*-Plots. Fassen Sie Ihre Erkenntnisse mit Illustrationen der von Ihnen erzeugten Plots kurz zusammen.

(ii) Simulieren Sie die Situation aus Aufgabe 5.1 mit einer hinreichend hohen Anzahl von Kompartimenten für den betrachteten Dendriten und vergleichen Sie Ihre dortigen Ergebnisse mit den Simulationsdaten. Variieren Sie die Länge des Dendriten und erläutern Sie Ihre Beobachtungen.

(iii) Wiederholen Sie (ii) analog für die Situation aus Aufgabe 5.2.

(iv) Erweitern Sie Ihre Modelle aus (ii) und (iii) um die Hodgkin-Huxley-Konduktivitäten und wiederholen Sie Ihre Simulationen. Was berechnen Sie nun? Wie verändern sich die Signalverhalten? Deuten Sie Ihre Beobachtungen.

**Aufgabe 5.4 (4 Bonus-Punkte)** (*NEURON-Netzwerk*)

Erstellen Sie schließlich ein kleines Netzwerk von Neuronen und untersuchen Sie mit dessen Hilfe Ihnen bereits bekannte neuronale Phänomene (wie z.B. *Signalsummation*, *Refraktärphase* oder *spike rate adaption*). Protokollieren Sie Ihre Ergebnisse mit Illustrationen der von Ihnen erzeugten Plots.

---

<sup>1</sup><http://www.neuron.yale.edu/neuron/>

<sup>2</sup><http://www.anc.ed.ac.uk/school/neuron/>