G-CSC Goethe-Center for Scientific Computing der Universität Frankfurt

8. Übung zur Vorlesung
Modellierung und Simulation 3
(WS 2013/14)
Prof. Dr. G. Queisser
Markus Breit, Martin Stepniewski

Abgabe: Dienstag, 04.02.2014, 12:00 Uhr

Aufgabe 8.1 (2+4 Punkte + 2 Bonus) (*Finite Differenzen im 2d-Fall*)
Gegeben sei das folgende eindimensionale, stationäre und inhomogene Diffusionsproblem, auch bekannt als *Poisson-Problem:*

$$-\Delta u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x), \qquad x \in \Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}, \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{1}$$

mit *Dirichlet-Randbedingung*

$$u(x) = g(x), \qquad x \in \partial\Omega = \{a, b\} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}$, das durch ein äquidistantes Gitter $\Omega_h := \{x \in \Omega : \frac{x}{h} \in \mathbb{Z}\}$ mit Maschenweite h diskretisiert ist.

Bei der *Finite-Differenzen-Methode* erfolgt die Diskretisierung der zweiten Ortsableitung mit Hilfe der zentralen Differenzenquotienten der zweiten Ableitung:

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = \frac{u(x-h) - 2u(x) + u(x+h)}{h^2} + O(h^2)$$

Bei diesem Verfahren berechnet man für das exakte Problem (1) nun jeweils in jedem Gitterpunkt eine numerische Approximation nach folgender Vorschrift:

$$-\Delta u \approx \frac{-u(x-h) + 2u(x) - u(x+h)}{h^2} =: -\Delta_h u_h = f_h(x)$$

(i) Zeigen Sie, dass sich daraus das folgende zu lösende lineare Gleichungssystem ergibt:

$$L_h u_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \dots & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(a+h) \\ u(a+2h) \\ u(a+3h) \\ \dots \\ u(b-2h) \\ u(b-h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(a+h) + h^{-2} g(a) \\ f(a+2h) \\ f(a+3h) \\ \dots \\ f(b-2h) \\ f(b-h) + h^{-2} g(b) \end{bmatrix} = f_h$$

(ii) Diskretieren Sie nun das Randwertproblem

$$
\begin{aligned}
u''(x) &= -\pi^2 \cos(\pi x), \qquad x \in (0,1) \\
u(0) &= 1 \\
u(1) &= -1
\end{aligned}
$$

mit dem Finite-Differenzen-Verfahren auf einem Gitter der Schrittweite $h = 0.25$ und stellen Sie das resultierende lineare Gleichungssystem $L_h u_h = f_h$ auf.

(iii) Lösen Sie das LGS aus (ii).

Aufgabe 8.2 (1+3 Punkte + 3 Bonus) (*Finite Differenzen im 2d-Fall*)
Gegeben sei das folgende zweidimensionale stationäre und homogene Diffusionsproblem, auch bekannt als *Laplace-Problem*:

$$
-\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f = 0 \qquad \text{in } \Omega = [0,1] \times [0,1]
$$

mit *Dirichlet-Randbedingung*

$$
\begin{aligned}
u(0,y) &= 1 \\
u(1,y) &= 0 \\
u(x,0) &= u(x,1) = 1 - x
\end{aligned}
$$

Dies entspricht einer vorgegebenen Konzentration von 1 am linken Rand und 0 am rechten Rand. Außerdem soll das Konzentrationsprofil auf dem oberen und unteren Rand jeweils einen linearen Verlauf (von 1 abfallend auf 0) haben.
Für ein Gitter mit Maschenweite $h = 1/3$ ergibt sich beispielhaft folgende räumliche Verteilung der Randwerte:

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\
1 & * & * & 0 \\
1 & * & * & 0 \\
1 & 2/3 & 1/3 & 0
\end{array}
$$

(i) Überlegen Sie sich zunächst intuitiv, welche Konzentrationsverteilung sich im Innern in den Gitterpunkten * einstellen wird?

(ii) Für ein Gitter mit Maschenweite $h > 0$, $N := 1/h$ und lexikographisch nummerierte Gitterpunkte ergibt sich für das obige Randwertproblem mit Hilfe der

Finite-Differenzen-Diskretisierung das folgende lineare Gleichungssystem

$$L_h u_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} T & -I & & & & \\ -I & T & -I & & & \\ & -I & T & -I & & \\ & & \cdots & & & \\ & & & -I & T & -I \\ & & & & -I & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \cdots \\ u_{(N-2)^2} \\ u_{(N-1)^2} \end{bmatrix} = f_h$$

mit $(N-1) \times (N-1)$ Einheitsmatrixblöcken I und $(N-1) \times (N-1)$ Matrixblöcken

$$T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & \\ & -1 & 4 & -1 & & \\ & & \cdots & & & \\ & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & -I & 4 \end{bmatrix}.$$

Beachten Sie unbedingt, dass in die diskrete rechte Seite f_h des zu lösenden Gleichungssystems neben f (hier 0) auch die Dirichlet-Randwerte mit eingehen!

Überlegen Sie sich, wie f_h für die obigen Randwerte aussehen muss, und schreiben Sie das lineare Gleichungssystem für obiges Problem explizit auf (für $h = 1/3$).

(iii) Lösen Sie das LGS aus (ii).

Aufgabe 8.3 (2+1+3 Punkte) (*Konvergenzordnungen Finiter Differenzen*)
In der Vorlesung wurde über links- ([-1 **1**]) und rechtsseitige ([**-1** 1]) finite Differenzen erster Ordnung ein Differenzenschema für die zweite Ableitung hergeleitet, welches die Ordnung 2 besitzt: $\frac{1}{h}[-1\ \mathbf{1}] * \frac{1}{h}[\mathbf{-1}\ 1] = \frac{1}{h^2}[1\ \mathbf{-2}\ 1]$.
Man kann nun analog aus zweimaliger Anwendung eines Differenzenschemas zweiter Ordnung für die erste Ableitung, nämlich $\frac{1}{2h}[-1\ 0\ 1]$, ein weiteres Differenzenschema für die zweite Ableitung herleiten: $\frac{1}{2h}[-1\ 0\ \mathbf{1}] * \frac{1}{2h}[\mathbf{-1}\ 0\ 1] = \frac{1}{4h^2}[1\ 0\ \mathbf{-2}\ 0\ 1]$.

(i) Welche Ordnung erwarten Sie für dieses Verfahren? Bestimmen Sie die tatsächliche Ordnung. Wieso kann die Ordnung des Schemas nicht höher sein?

(ii) Welche Gestalt hat die Matrix, die entsteht, wenn man die zweite Ableitung einer Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf einem regelmäßigen Gitter mit diesem FD-Schema berechnet (Randknoten vernachlässigen). Wieso ist dieses Schema nicht gebräuchlich?

(iii) Finden Sie für die zweite Ableitung ein Schema vierter Ordnung, das nur die fünf nächsten Werte der lokalen Umgebung benötigt, d.h. bestimmen Sie die Koeffizienten von [a b **c** d e] so, dass dieses Schema Ordnung vier besitzt.

Tipp: Symmetrien nutzen!