

Mehrgitterverfahren

G. Wittum

Wintersemester 1999/2000

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Modellproblem 1: Box-Verfahren auf strukturiertem Gitter	3
1.2	Iterative Verfahren	5
2	Ein einfaches Modellproblem	10
2.1	Glättungseigenschaften klassischer Iterationen	10
2.2	Das Zweigitterverfahren	13
2.3	Konvergenzbetrachtung für das Zweigitterverfahren	14
3	Komponenten des Mehrgitterverfahrens	17
3.1	Glätter	17
3.1.1	Jacobi-Verfahren	17
3.1.2	Gauß-Seidel-Verfahren	18
3.1.3	Symmetrisches Gauß-Seidel-Verfahren	20
3.1.4	Parameter des Mehrgitterverfahrens	20
3.2	Gittertransfer	21
3.2.1	Prolongation	21
3.2.2	Restriktion	22
3.2.3	Finite Elemente, Finite Volumen, unstrukturierte Gitter	23
3.3	Grobgittermatrix	23
4	Konvergenz	24
4.1	Zweigitterverfahren	24
4.1.1	Glättungseigenschaft	25
4.1.2	Approximationseigenschaft	28
4.2	Mehrgitterverfahren	29
5	Nichtlineare Mehrgitterverfahren	32
5.1	Einführung	32
5.2	Das Newton-Mehrgitterverfahren	33
6	Mehrgitterverfahren für singularär gestörte Probleme	35
6.1	Anisotrope Probleme	35
6.2	Konvektions-Diffusions-Gleichung	41

7 Mehrgitterverfahren für gekoppelte Systeme von partiellen Differentialgleichungen	44
7.1 Einführung	44
7.2 Transformierende Glätter	47
7.3 Kollektive Glätter (Punkt-Block-Glätter)	50
8 Heterogene Probleme	54
8.1 Einführung	54
8.2 Algebraische Multilevel-Verfahren	54

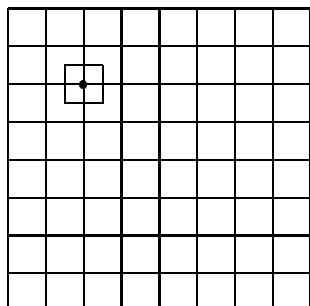
Kapitel 1

Einleitung

1.1 Modellproblem 1: Box-Verfahren auf strukturiertem Gitter

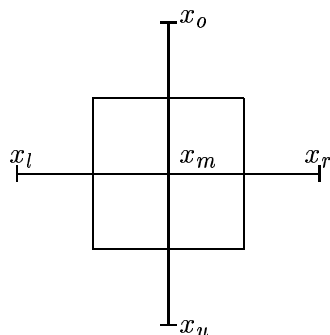
Gegeben sei das Randwertproblem

$$(1.1.1) \quad \begin{aligned} -\operatorname{div}(\varphi(x, y) \operatorname{grad} u(x, y)) &= f(x, y) \quad \text{in } \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \\ u(x, y) &= g(x, y) \quad \text{auf dem Rand } \Gamma = \partial\Omega \end{aligned}$$



Ω werde diskretisiert durch ein regelmäßiges kartesisches Gitter der Schrittweite $h > 0$
 $\rightarrow \Omega_h$

Als Diskretisierung werden Finite Volumen (FV) verwendet und ein Gitterpunkt x_m herausgegriffen. Am Beispiel dieses Gitterpunktes wird das Prinzip der Finite Volumen Diskretisierung eingeführt.



Box B_m zum Gitterpunkt x_m

Die Differentialgleichung läßt sich durch Integration umschreiben wie folgt (k ist die Anzahl

der Boxen bzw. inneren Punkte). Aus

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div}(\varphi(x, y)\nabla u(x, y)) = \sum_{i=1}^k \int_{B_i} -\operatorname{div}(\varphi\nabla u)$$

folgt mit dem Gauß'schen Satz

$$\int_{B_i} -\operatorname{div}(\varphi\nabla u) \cdot 1 = - \int_{\partial B_i} \varphi\nabla u \cdot \vec{n}$$

die Beziehung

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div}(\varphi\nabla u) = - \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_i} \underbrace{\varphi \nabla u \cdot \vec{n}}_{\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}} = \sum_{i=1}^k \int_{B_i} f$$

Fluß durch
den Rand

Die letzte Gleichung ist erfüllt wenn gilt:

$$\int_{\partial B_i} \varphi \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \int_{B_i} f \quad \forall i = 1, \dots, k$$

Das entspricht einem Erhaltungssatz.

Die Vorgehensweise war die folgende: Zuerst wird Ω in die Teilvolumina der Boxen B_i zerlegt. Somit wird aus der integralen Darstellung des Problems eine Summe über die Integrale der Teilvolumina gefunden. Aus dem Gauß'schen Satz und partieller Integration folgt die Integration über den Rand des Teilvolumens nach der Normalenableitung.

Nun wird diese Integralgleichung approximiert durch den Fünfpunktstern K_h .

$$K_h = \begin{bmatrix} & -k_o & & & \\ -k_l & k_m & -k_r & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & -k_u \end{bmatrix}$$

mit $k_{o,u,r,l} = \frac{1}{2}(\varphi(x_{o,u,r,l}) + \varphi(x_m))$ als arithmetisches Mittel der Werte an den Nachbarpunkten und $k_m = k_l + k_r + k_o + k_u$.

Mit lexikographischer Nummerierung folgt die Systemmatrix K_h :

$$(1.1.2) \quad K_h = \begin{pmatrix} D_1 & L_1^T & 0 & \cdots & 0 \\ L_1 & D_2 & L_2^T & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & L_{n-2} & D_{n-1} & L_{n-1}^T \\ 0 & \cdots & 0 & L_{n-1} & D_n \end{pmatrix}$$

Das ist eine $n \times n$ Block-Tridiagonalmatrix mit den Blöcken:

$$D_i = \begin{pmatrix} k_m(x_i) & -k_r(x_i) & & & 0 \\ -k_l(x_{i+1}) & k_m(x_{i+1}) & -k_r(x_{i+1}) & & \\ & \ddots & \ddots & & -k_r(x_{i+n-2}) \\ 0 & & -k_l(x_{i+n-1}) & k_m(x_{i+n-1}) & \end{pmatrix} \quad n \times n \text{ Tridiagonalmatrix}$$

$$L_i = \begin{pmatrix} -k_u(x_{i+n}) & 0 & 0 \\ 0 & -k_u(x_{i+n+1}) & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & 0 & -k_u(x_{i+2n-1}) \end{pmatrix} \quad n \times n \text{ Diagonalmatrix}$$

Definition 1.1 Eine $N \times N$ Matrix heißt dünn besetzt (sparse), wenn gilt

$$(1.1.3) \quad \#\{a_{ij}, a_{ij} \neq 0\} = \mathcal{O}(N)$$

1.2 Iterative Verfahren

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$(1.2.4) \quad Kx = b \quad K \text{ ist eine dünn besetzte } n \times n \text{ Matrix}$$

Ein Iterationsverfahren zur Lösung von 1.2.4 ist gegeben durch die nachfolgende Bemerkung: Sei x_0 ein beliebiger Startvektor, dann ist

$$(1.2.5) \quad x^{(i+1)} = \underbrace{x^{(i)}}_{\in \mathcal{U} \subset \mathcal{H}^2} - M^{-1} \left(\underbrace{Kx^{(i)} - b}_{\substack{\text{Residuum/Defekt} \\ \in \mathcal{F} \subset \mathcal{L}^2}} \right)$$

eine Iteration. Dabei muß M regulär und leicht invertierbar sein (also mit $\mathcal{O}(n)$). M^{-1} ist eine Abbildung vom ‘‘Raum der rechten Seiten’’ \mathcal{F} in den ‘‘Raum der Lösungen’’ \mathcal{U} . Die Matrix M sollte ‘‘ziemlich nah’’ bei K liegen, da man für $M = K$ die exakte Lösung in einem Schritt erhält.

Beispiele:

1. $M = \text{diag}(m_{ii})$ Diagonalmatrix
2. $M = L + D$, L linke untere dünn besetzte Dreiecksmatrix und D Diagonalmatrix
3. $M = (L + D)D^{-1}(R + D)$, R obere Dreiecksmatrix, L untere Dreiecksmatrix, D Diagonalmatrix, R, L dünn besetzt. Das ist mit Aufwand $\mathcal{O}(n)$ lösbar, weil gilt:

$$My = (L + D)D^{-1} \underbrace{(R + D)y}_z = d \quad \implies \quad (L + D)D^{-1}z = d \quad \text{und} \quad (R + D)y = z$$

Beide linearen Gleichungssysteme sind mit $\mathcal{O}(n)$ lösbar.

Man nennt M^{-1} die ‘‘angenäherte Inverse’’ oder ‘‘Vorkonditionierer’’.

Beispiel:

$$K = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & -1 & 4 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 & & & \\ 0 & -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 0 & \\ & & & 0 & -1 \end{matrix}} & \\ \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 & & & \\ 0 & -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 0 & \\ & & & 0 & -1 \end{matrix}} & & \ddots & \\ & & & \ddots & & \ddots & \end{pmatrix}$$

Diese Matrix wird in ihre oberen und unteren Dreiecksanteile L und R und in ihre Diagonale D zerlegt, so daß gilt: $K = L + D + R$.

Fall 1: $M = D$, Jacobi-Verfahren (1848)

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - D^{-1}(Kx^{(i)} - b)$$

für die j -te Komponente des Vektors $x^{(i+1)}$ gilt dann

$$\begin{aligned} x_j^{(i+1)} &= x_j^{(i)} - \frac{1}{4}(4x_j^{(i)} - x_{j-1}^{(i)} - x_{j+1}^{(i)} - x_{j+n}^{(i)} - x_{j-n}^{(i)} - b_j) \\ &= \frac{1}{4}(x_{j-1}^{(i)} + x_{j+1}^{(i)} + x_{j+n}^{(i)} + x_{j-n}^{(i)} + b_j) \end{aligned}$$

Fall 2: $M = L + D$, Gauß-Seidel-Verfahren (1870)

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - (L + D)^{-1}(Kx^{(i)} - b)$$

Für die j -te Komponente des Vektors $x^{(i+1)}$ gilt nun

$$\begin{aligned} x_j^{(i+1)} &= x_j^{(i)} - \left((L + D)^{-1}((L + D)x^{(i)} + Rx^{(i)} - b) \right)_j \\ &= x_j^{(i)} - x_j^{(i)} - \left((L + D)^{-1}(Rx^{(i)} - b) \right)_j \\ &= \left(-(L + D)^{-1}(Rx^{(i)} - b) \right)_j \\ &= \frac{1}{4} \left(x_{j-n}^{(i+1)} + x_{j-1}^{(i+1)} + x_{j+1}^{(i)} + x_{j+n}^{(i)} - b_j \right) \end{aligned}$$

Lemma 1.1 Konvergiert das Iterationsverfahren 1.2.5 so ist dessen Fixpunkt Lösung der Gleichung

$$(1.2.6) \quad Kx = b$$

Beweis: 1.2.5 konvergiert $\implies \exists$ Fixpunkt x^* so daß

$$x^* = x^* - M^{-1}(Kx^* - b) \implies Kx^* - b = 0 \quad \text{wenn } M \text{ regulär}$$

Lemma 1.2 *Das Iterationsverfahren 1.2.5 konvergiert genau dann wenn gilt*

$$(1.2.7) \quad \rho(\underbrace{I - M^{-1}K}_{=:S}) < 1$$

Beweis: 1.2.5 konvergiere $\implies \|x - x^{(i+1)}\| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0 \iff$

$$\begin{aligned} \|x - x^{(i+1)}\| &= \|x - Sx^{(i)}\| \quad \text{wobei } x \text{ Fixpunkt ist } \implies Sx = x \\ &= \|S(x - x^{(i)})\| = \|S^i(x - x^{(0)})\| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0 \iff S^i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

S symmetrisch $\implies S = T^H D T$ mit T unitär und $D = \text{diag}(\lambda_i)$ Diagonalmatrix
 $\implies S^i = T^H D^i T \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0 \iff D^i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0 \iff |\lambda_j| < 1$

S nicht symmetrisch $\implies S$ läßt sich darstellen als $S = T^{-1} J T$, wobei J die Jordan Normalform der Matrix S ist.

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix} \quad \text{mit } 1 \leq j \leq r$$

die Jordankästchen der Matrix J . Multipliziert man die Jordanmatrix mit sich selbst, werden jeweils die Kästchen mit sich selbst multipliziert.

$$J^i = \begin{pmatrix} J_1^i & & \\ & \ddots & \\ & & J_r^i \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad J_j^i = [\alpha_{kl}^{(i)}(j)]_{k,l}$$

$$\alpha_{kl}^{(i)} = \begin{cases} 0 & \text{für } l < k \text{ und } i + k < l < n_k \\ \binom{i}{l-k} \lambda_j^{(i-l+k)} & \text{für } k \leq l \leq \min(n_j, i + k) \end{cases}$$

Damit gilt dann in Fortsetzung von oben:

$$\begin{aligned} S^i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0 \iff J^i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0 \iff J_j^i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0 \iff \alpha_{kl}^{(i)}(j) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0 \iff |\lambda_j| < 1 \quad \forall j = 1, \dots, r \\ \iff \rho(S) < 1 \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen.

Bei der Iteration kann nur die Matrix M gewählt werden. Wie sieht eine solche Matrix aus? Die Aufspaltung von K liefert

$$(1.2.8) \quad K = M - N \quad \text{mit der angenäherten Inversen } M \text{ und der Restmatrix } N$$

Die verschiedenen Iterationsverfahren unterscheiden sich durch die Wahl von M .

Sei K z.B. zerlegt in $K = L + D + U$ mit L echte untere Dreiecksmatrix, D Diagonalmatrix und U echte obere Dreiecksmatrix, dann erhält man durch die Wahl $M = D$ das Jacobi- und durch $M = L + D$ das Gauß-Seidel-Verfahren. Beide Verfahren verlangen, daß die Diagonale von M ungleich Null sein muß. Außerdem setzen sie beide voraus, daß D regulär ist.

Beispiel: Incomplete LU-decomposition, ILU-Iteration

Betrachte K_h aus 1.1.2 mit $\varphi(x, y) = 1$:

$$K = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & -1 & 4 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 & & & \\ 0 & -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 0 & \\ & & & 0 & -1 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 & & & \\ 0 & -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 0 & \\ & & & 0 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} \ddots & & & \ddots \\ \ddots & & & \ddots \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Durch Gauß-Elimination in der zweiten Zeile erhält man

$$K = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 & -1 & & & \\ 0 & \frac{15}{4} & -1 & & \\ -1 & 4 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & -1 & 4 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 & & & \\ -\frac{1}{4} & -1 & 0 & & \\ & 0 & -1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 & \\ & & & 0 & -1 \end{matrix}} \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Die LU-Zerlegung angewandt auf eine dünn besetzte Matrix erzeugt eine vollbesetzte Matrix, d.h. die Bänder werden aufgefüllt. Um weiterhin dünn besetzte Matrizen zu erhalten, werden die Null-Einträge beibehalten, d.h. die zusätzlichen Beiträge werden weggelassen.

K wird also zerlegt in

$$(1.2.9) \quad K = LU - N$$

wobei N alle Einträge umfaßt außerhalb des Musters von K . Die Wahl von $M = LU$ führt auf die ILU-Iteration.

Lemma 1.3 K ist eine M -Matrix $\implies K$ hat eine unvollständige LU Zerlegung falls auf jeden Fall die Gauß Korrekturen auf dem Besetzungsmuster von K mitgenommen werden.

Definition 1.2 Das Besetzungsmuster \mathfrak{M}_A einer Matrix A ist die Menge

$$\mathfrak{M}_A = \{(i, j) | a_{ij} \neq 0\}$$

Zwei Arten von ILU sind möglich:

1. Threshold ILU (Schwellen ILU)
akzeptiere den Eintrag $e_{ij} \iff \left| \frac{e_{ij}}{d_{jj}} \right| > \epsilon$, wobei ϵ eine vorgegeben Schwelle ist.
2. ILU auf vorgegebenem Muster

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_L \cup \mathfrak{M}_U$$

ILU(0) "ILU nullter Ordnung", $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{(0)} = \mathfrak{M}_K$. Wird als Besetzungsmuster für L und U nur das Muster von K gewählt, erhält man eine ILU(0). Die Matrix N enthält die weggelassenen Einträge. Nimmt man diese hinzu, erhält man eine ILU(1), ILU erster Ordnung mit

$$\mathfrak{M}^{(1)} = \mathfrak{M}^{(0)} \cup \mathfrak{M}_{N^{(0)}}$$

Definition 1.3 Eine $n \times n$ Matrix K heißt *M-Matrix*, wenn gilt

1. $K_{jj} > 0 \quad \forall j$
2. $K_{ij} \leq 0 \quad \forall i \neq j$
3. K ist regulär und $K^{-1} \geq_{elem} 0$

Definition 1.4 Die Aufspaltung $K = M - N$ heißt *regulär*, genau dann, wenn gilt

$$M^{-1} \geq 0 \quad \text{und} \quad N \geq 0$$

Die Aufspaltung heißt *konvergent*, wenn das entsprechende Iterationsverfahren konvergiert.

Satz 1.1 Die reguläre Aufspaltung einer M-Matrix ist konvergent.

Bemerkung: Ist K eine M-Matrix, so sind die obengenannten (GS, ILU) Aufspaltungen reguläre Zerlegungen.

Beweis:

Jacobi-Verfahren: $M = D > 0 \implies M^{-1} \geq 0, N = -L - R \geq 0$

Gauß-Seidel-Verfahren: $M = L + D \implies M$ ist M-Matrix $\implies M^{-1} \geq 0$ und $N = -R \geq 0$

Lemma 1.4 Vergleich von M-Matrizen

Sei A eine M-Matrix. Für die Matrix B gelte die Vorzeichenbedingung und $b_{ij} > a_{ij} \quad \forall i, j$. Dann ist B ebenfalls M-Matrix.

Beweis: siehe Varga

Satz 1.2 Ist $K = K^{-1} > 0$, so konvergieren das Jacobi und das Gauß-Seidel-Verfahren.

Beweis: siehe Hackbusch

Kapitel 2

Ein einfaches Modellproblem

2.1 Glättungseigenschaften klassischer Iterationen

Die Diskretisierung von

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\varphi(x, y)\nabla u) &= f & (x, y) \in \Omega &= [0, 1] \times [0, 1] \\ u &= g & (x, y) \in \partial\Omega \end{aligned}$$

führt für $\varphi(x, y) = 1$ auf die Systemmatrix K_h aus 1.1.2. Diese Matrix hat die Eigenvektoren

$$(2.1.1) \quad \Psi_{\mu, \nu}(x_h, y_h) = 2 \sin(\mu\pi x_h) \sin(\nu\pi y_h) \quad \text{mit} \quad (x_h, y_h) \in \Omega_h \quad 1 \leq \mu, \nu \leq \frac{1}{h} - 1$$

sowie die Eigenwerte

$$(2.1.2) \quad \lambda_{\mu, \nu}(K_h) = 2h^{-2}(2 - \cos(\mu\pi h) - \cos(\nu\pi h))$$

Das gedämpfte Jacobiverfahren hat die Iterationsmatrix

$$(2.1.3) \quad S_\omega = I - \omega D^{-1}K = I - \frac{\omega h^2}{4}K$$

S_ω hat die Eigenwerte

$$\begin{aligned} \lambda_{\mu, \nu}(S_\omega) &= 1 - \omega \frac{h^2}{4} \lambda_{\mu, \nu}(K) \\ &= 1 - \omega \frac{h^2}{4} \cdot 2h^{-2}(2 - \cos(\mu\pi h) - \cos(\nu\pi h)) \\ &= 1 - \omega + \frac{1}{2}\omega(\cos(\mu\pi h) + \cos(\nu\pi h)) \end{aligned}$$

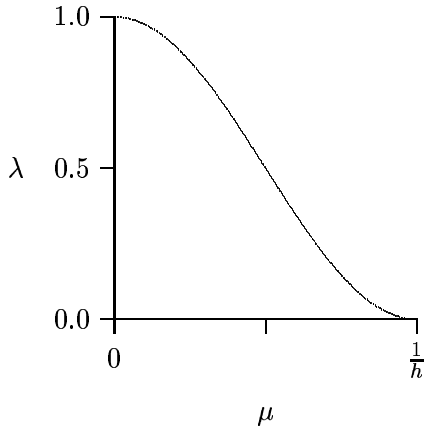
Wählt man speziell $\omega = \frac{1}{2}$, so folgt

$$\begin{aligned} \lambda_{\mu, \nu}(S_{\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{4}(2 + \cos(\mu\pi h) + \cos(\nu\pi h)) \\ \rho(S_{\frac{1}{2}}) &= \frac{1}{4}(2 + 2 \cos(\pi h)) < 1 \end{aligned}$$

Entwicklung des cos führt auf

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4) \\ \rho(S_{\frac{1}{2}}) &\approx \frac{1}{4}(2 + 2 - (\pi h)^2) = 1 - \frac{(\pi h)^2}{4} + \mathcal{O}(h^4) \end{aligned}$$

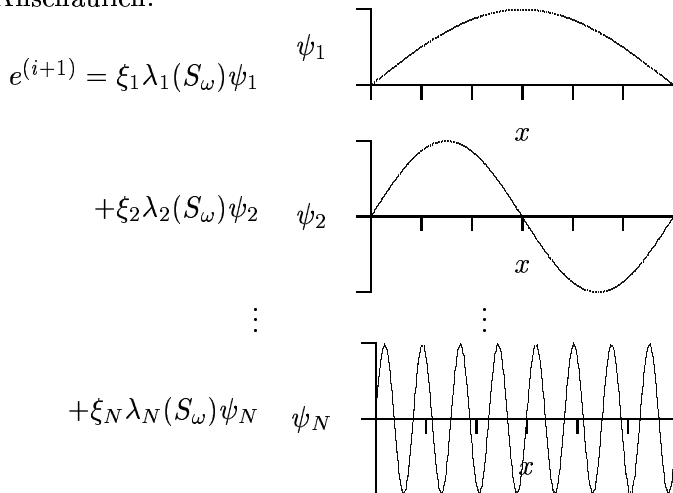
Je feiner das Gitter (je kleiner h) umso langsamer konvergiert das Verfahren (umso näher liegt ρ bei 1)!



Entwicklung des Fehlers $e^{(i)} = x - x^{(i)}$, wobei x die Lösung ist, nach den Eigenvektoren:

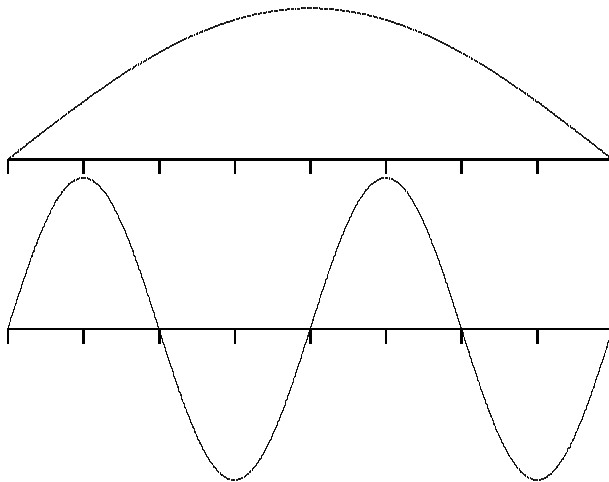
$$\begin{aligned} e^{(i)} &= x - x^{(i)} = \sum_{\mu,\nu=1}^N \xi_{\mu,\nu} \psi_{\mu,\nu} \quad \text{mit} \quad N = \frac{1}{h} - 1 \\ e^{(i+1)} &= S_\omega e^{(i)} = \sum_{\mu,\nu=1}^N \xi_{\mu,\nu} \lambda_{\mu,\nu}(S_\omega) \psi_{\mu,\nu} \end{aligned}$$

Anschaulich:



Das gedämpfte Jacobiverfahren glättet, d.h. große μ, ν , hohe Frequenzen der Eigenvektoren werden stark gedämpft, kleine μ, ν dagegen schwach. Deswegen bezeichnet man das Verfahren als Glätter (Smoother). Langsame Konvergenz ist durch die große Dimension des Problems bedingt.

Idee: Kombination mit größerem Gitter



Glatte Funktionen lassen sich auf einem größeren Gitter darstellen.

Rauhe Funktionen lassen sich nicht auf einem größeren Gitter darstellen.

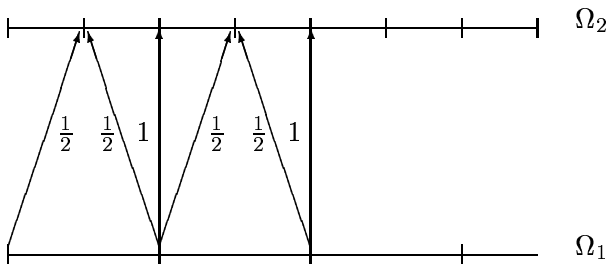
Bemerkung: Fehler $x - x^{(i)}$ ist die optimale Korrektur:

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + (x - x^{(i)}) = x$$

Der Fehler ist die Lösung von $K(x - x^{(i)}) = f - Kx^{(i)}$. $f - Kx^{(i)}$ heißt Residuum ($Kx^{(i)} - f$ heißt Defekt.)

Mehrgitteridee: Residuum (Defekt) nach dem Glätten auf größeres Gitter restringieren (Restriktion), dort lösen, wieder auf das feine Gitter interpolieren (prolongieren, Prolongation).

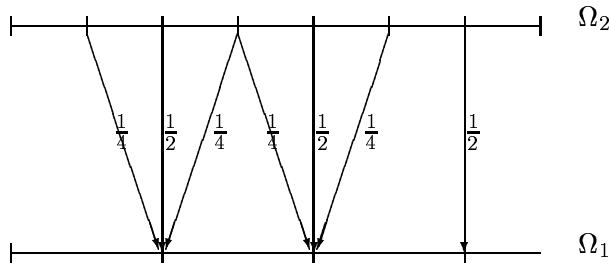
Prolongation (1D):



In Matrix-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ \vdots \\ u_{n_2}^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{n_1 \text{ Spalten}} \cdot \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ \vdots \\ u_{n_1}^1 \end{pmatrix}$$

Restriktion:



In Matrix-Schreibweise lautet die erste Möglichkeit (Injektion):

$$\begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ \vdots \\ u_{n_1}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ \vdots \\ u_{n_2}^2 \end{pmatrix}$$

Die zweite (oben dargestellte) Möglichkeit lautet in Matrix-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ \vdots \\ u_{n_1}^1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ \vdots \\ u_{n_2}^2 \end{pmatrix}$$

In einer Dimension gilt $r = \frac{1}{2}p^T$.

2.2 Das Zweigitterverfahren

Seien zwei verschiedene Gitter Ω_1 (grobes Gitter) und Ω_2 (feines Gitter) mit den Schrittweiten $h_1 > h_2$ ($\Omega_2 \subset \Omega_1$) gegeben. Die Steifigkeitsmatrizen K_1 und K_2 sollen durch dieselbe Diskretisierung (z.B. finite Elemente, finite Differenzen oder finite Volumen) entstanden sein. Außerdem seien die Transferoperationen p Prolongation und r Restriktion gegeben.

Algorithmus der Zweigitterverfahrens:

Sei $u^{(0)}$ ein beliebiger Startwert, $u^{(i+1)}$ ergibt sich aus $u^{(i)}$ nach dem folgenden Algorithmus

$\bar{u}_2 = S_2^{\nu_1} u_2^{(i)}$ Glättung auf Gitter 2 (feines Gitter)

$d_2 = K_2 \bar{u}_2 - f_2$ Berechnung des Defektes

$d_1 = r d_2$ Restriktion des Defektes

$\tilde{u}_1 = K_1^{-1} d_1$ Exakte Lösung auf Gitter 1 (grobes Gitter), Approximation der Korrektur, nicht der Lösung

$\tilde{u}_2 = \bar{u}_2 - p \tilde{u}_1$ Korrektur durch Prolongation der Lösung von Gitter 1

$u_2^{(i+1)} = S_2^{\nu_2} \tilde{u}_2$ Nachglättung

Bemerkung: Das Zweigitterverfahren läßt sich als lineares Iterationsverfahren in der Form:

$$\begin{aligned} u^{(i+1)} &= S_2^{\nu_2} \left(S_1^{\nu_1} u^{(i)} - pK_1^{-1}r(K_2 S_1^{\nu_1} u^{(i)} - f_2) \right) \\ &= \underbrace{S_2^{\nu_2} (I - pK_1^{-1}rK_2) S_1^{\nu_1}}_{= T} u^{(i)} + \underbrace{pK_1^{-1}r}_{N} f_2 \end{aligned}$$

Zweigitteriterationsmatrix

schreiben. Je mehr geglättet wird, desto besser konvergiert das Verfahren. Typischerweise werden 1-2 Glättungsschritte durchgeführt.

2.3 Konvergenzbetrachtung für das Zweigitterverfahren

Eindimensionales Modellproblem

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} \right)^2 u(x) &= f \quad \text{in } \Omega = (0, 1) \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

Diskretisierung mit FD führt auf $Kx = b$ mit

$$K = h^{-2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Das ist eine $(N - 1) \times (N - 1)$ Matrix. Das feine Gitter (Gitterweite $h = \frac{1}{N}$) habe $N - 1$ Unbekannte. Das grobe Gitter (Gitterweite $h' = \frac{1}{N'}$) habe $N' - 1$ Unbekannte. Gilt $h' = 2h$ so auch $N = 2N'$. Die Eigenvektoren für Ω_h sind

$$e_\alpha = \sqrt{\frac{h}{2}} \sin(\alpha\pi kh)$$

mit den Eigenwerten

$$4h^{-2} \sin^2(\alpha\pi \frac{h}{2})$$

Für $\Omega_{h'}$

$$e'_\alpha = \sqrt{\frac{h'}{2}} \sin(2\alpha\pi kh)$$

mit den Eigenwerten

$$h^{-2} \sin^2(\alpha\pi \frac{h'}{2})$$

Wie sieht der Zweigitteroperator T_{ZGV} in dieser Basis aus?

Zuerst führt man eine praktische Umordnung durch, die die Menge der Eigenvektoren folgendermaßen anordnet:

$$Q = (e_1, e_{N-1}, e_2, e_{N-2}, \dots, e_i, e_{N-i}, \dots, e_{N/2-1}, e_{N/2+1}, e_{N/2})$$

Der Grund für diese Umordnung: Restriktion von e_{N-1} führt auch auf e'_1 .

Wir untersuchen nun $\hat{T} = Q^{-1}TQ$.

Da Q eine Orthonormalmatrix ist folgt $\|\hat{T}\|_2 = \|T\|$ und da Q regulär gilt $\rho(\hat{T}) = \rho(T)$. Im Folgenden wird gezeigt werden, daß

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \hat{T}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{T}_{N'} \end{pmatrix}$$

mit T_α , $1 \leq \alpha \leq N' - 1$ sind 2×2 Matrizen und $T_{N'}$ ist ein kleiner Skalar.

Durch die unitäre Transformation mittels Q erhält man den transformierten Zweigitteroperator

$$\hat{T} = (I - \hat{p}\hat{K}_{h'}^{-1}\hat{r}\hat{K}_h)\hat{S}^\nu$$

Die einzelnen Matrizen sehen wie folgt aus

1. \hat{K}_h hat die Gestalt $\hat{K}_h = \text{blockdiag}\{\hat{K}_h^{(1)}, \dots, \hat{K}_h^{(N')}\}$ mit den Blöcken

$$\hat{K}_h^{(\alpha)} = 4h^{-2} \begin{pmatrix} s_\alpha^2 & 0 \\ 0 & c_\alpha^2 \end{pmatrix}$$

wobei $s_\alpha = \sin(\alpha\pi\frac{h}{2})$ und $c_\alpha = \cos(\alpha\pi\frac{h}{2})$ für $1 \leq \alpha \leq N' - 1$ gilt. Für $\hat{K}_h^{(N')}$ gilt $\hat{K}_h^{(N')} = 2h^{-2}$.

2. \hat{S} hat die Gestalt $\hat{S}_h = \text{blockdiag}\{\hat{S}_h^{(1)}, \dots, \hat{S}_h^{(N')}\}$ mit den Blöcken

$$\hat{S}_h^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} c_\alpha^2 & 0 \\ 0 & s_\alpha^2 \end{pmatrix}$$

wobei $s_\alpha = \sin(\alpha\pi\frac{h}{2})$ und $c_\alpha = \cos(\alpha\pi\frac{h}{2})$ für $1 \leq \alpha \leq N' - 1$ gilt. Für $\hat{S}_h^{(N')}$ gilt $\hat{S}_h^{(N')} = 1/2$.

3. \hat{r} hat die Gestalt $\hat{r} = \text{blockdiag}\{\hat{r}^{(1)}, \dots, \hat{r}^{(N')}\}$ mit den Blöcken

$$\hat{r}^{(\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} c_\alpha^2 & -s_\alpha^2 \end{pmatrix}$$

wobei s_α und c_α für $1 \leq \alpha \leq N' - 1$ wie oben definiert sind. Für $\hat{r}^{(N')}$ gilt $\hat{r}^{(N')} = 0$.

4. \hat{p} hat die Gestalt $\hat{p} = \text{blockdiag}\{\hat{p}^{(1)}, \dots, \hat{p}^{(N')}\}$ mit den Blöcken

$$\hat{p}^{(\alpha)} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} c_\alpha^2 \\ -s_\alpha^2 \end{pmatrix}$$

wobei s_α und c_α für $1 \leq \alpha \leq N' - 1$ wie oben definiert sind. Für $\hat{p}^{(N')}$ gilt $\hat{p}^{(N')} = 0$.

5. $\hat{K}_{h'}^{-1}$ hat die Gestalt $\hat{K}_h = \text{diag}\{\hat{K}_{h'}^{(1)}, \dots, \hat{K}_{h'}^{(N')}\}$ mit

$$\hat{K}_{h'}^{(\alpha)} = 4h^{-2}s_\alpha^2c_\alpha^2$$

wobei s_α und c_α für $1 \leq \alpha \leq N' - 1$ wie oben definiert sind. Für $\hat{p}^{(N')}$ gilt $\hat{p}^{(N')} = 0$.

Kombiniert man alles, erhält man $\hat{T} = \text{blockdiag}\{\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_{N'-1}, 2^{-\nu}\}$, wobei für $1 \leq \alpha \leq N' - 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \hat{T}_\alpha &= (I - \hat{p}^{(\alpha)}\hat{K}_{h'}^{-1}\hat{r}^{(\alpha)}\hat{K}_h^{(\alpha)})\hat{S}_\alpha^\nu \\ &= \left[\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} c_\alpha^2 \\ -s_\alpha^2 \end{array} \right) \frac{h^2}{4s_\alpha^2c_\alpha^2} \left(\begin{array}{cc} c_\alpha^2 & -s_\alpha^2 \end{array} \right) 4h^{-2} \left(\begin{array}{cc} s_\alpha^2 & 0 \\ 0 & c_\alpha^2 \end{array} \right) \right] \left(\begin{array}{cc} c_\alpha^2 & 0 \\ 0 & s_\alpha^2 \end{array} \right)^\nu \\ &= \left(\begin{array}{cc} s_\alpha^2 & c_\alpha^2 \\ s_\alpha^2 & c_\alpha^2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} c_\alpha^2 & 0 \\ 0 & s_\alpha^2 \end{array} \right)^\nu \end{aligned}$$

Es gilt $0 < s_\alpha^2 < \frac{1}{2} < c_\alpha^2 < 1$.

Satz 2.1 *Es gilt*

$$\rho(T) \leq \max_{\xi \in [0, \frac{1}{2}]} (\xi(1 - \xi)^\nu + (1 - \xi)\xi^\nu) < 1$$

und

$$\|T\|_2 \leq \max_{\xi \in [0, \frac{1}{2}]} \sqrt{2\xi^2(1 - \xi)^{2\nu} + (1 + \xi^2)\xi^{2\nu}}$$

Beweis: \hat{T}_α hat die Eigenwerte $s_\alpha^2c_\alpha^{2\nu} + c_\alpha^2s_\alpha^{2\nu} = s_\alpha^2(1 - s_\alpha^2)^\nu + (1 - s_\alpha^2)(s_\alpha^2)^\nu$ und die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\|\hat{T}_\alpha\|$ geht ähnlich.

Satz 2.2 *Das oben beschriebene Zweigitterverfahren (ZGV) erfüllt für $\nu \geq 1$*

$$\begin{aligned} \rho(T_{2,l}(\nu, 0)) &\leq \delta_\nu < 1 \\ \|T_{2,l}(\nu, 0)\| &\leq \xi_\nu < 1 \end{aligned}$$

für alle $l \geq 0$.

Kapitel 3

Komponenten des Mehrgitterverfahrens

Es sei ein symmetrischer und elliptischer Differentialoperator der Ordnung $2m$ gegeben. Dieser sei durch ein "Gitterverfahren" (FEM, FV, finite Differenzen) auf einer Hierarchie von Gittern Ω_l mit Gitterweiten $h_l > h_{l+1} > 0$ ($l = 0, \dots, l_{\max}$) diskretisiert. Das zugehörige Gleichungssystem lautet:

$$K_l u_l = f_l$$

Algorithmus:

```
mgm(u,b) {
if l==0 then u=loese(l,K0,d)
else {
  u=glaette(l,nu1,u,b);
  d=defekt(l,u,b);
  d=restriktion(l,d);
  v=0;
  for i=0 to gamma do mgm(v,d);
  u=u-prolongiere(l-1,v);
  u=glaette(l,nu2,u,b);
}
}
```

3.1 Glätter

3.1.1 Jacobi-Verfahren

$$x^{\text{neu}} = x^{\text{alt}} - \omega D^{-1}(Kx^{\text{alt}} - f)$$

mit $\omega < 1$ (z.B. $\omega = \frac{1}{2}$), sonst (wenigstens für den Fünfpunktstern) kein Glätter. Die Konvergenzanalyse zeigt, daß

$$\omega \leq \frac{1}{\|K_l\|}$$

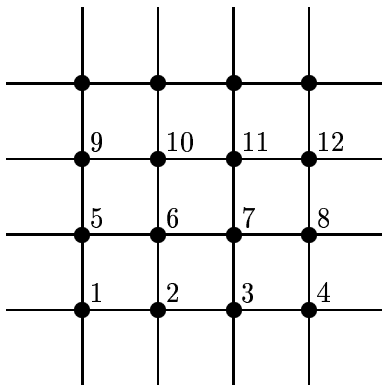
nicht von der Anordnung der Gitterpunkte abhängt. Dieses Verfahren ist deshalb trivial parallelisierbar.

3.1.2 Gauß-Seidel-Verfahren

$$M = D + L$$

unsymmetrisch, hängt von der Anordnung der Gitterpunkte ab.

1. lexikographische Anordnung



$$\Rightarrow K = \begin{pmatrix} \begin{array}{cccc} 4 & -1 & & \\ -1 & 4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 4 \end{array} & \begin{array}{cccc} -1 & 0 & & \\ 0 & -1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ & & 0 & -1 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} -1 & 0 & & \\ 0 & -1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ & & 0 & -1 \end{array} & \begin{array}{cccc} 4 & -1 & & \\ -1 & 4 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 4 \end{array} \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

2. Schachbrettanordnung (red-black ordering)

3.1.3 Symmetrisches Gauß-Seidel-Verfahren

Kombiniere zwei Schritte des GS-Verfahrens bei Umkehren der Anordnung:

$$\begin{aligned} x' &= x^{\text{alt}} - (D + L)^{-1}(Kx^{\text{alt}} - f) \\ x^{\text{neu}} &= x' - (D + U)^{-1}(Kx' - f) \end{aligned}$$

Lemma 3.1 *Es gilt*

$$M = (L + D)D^{-1}(D + U)$$

für das symmetrische Gauß-Seidel-Verfahren.

Beweis:

$$\begin{aligned} S_{\text{SGS}} &= (I - (D + U)^{-1}K)(I - (D + L)^{-1}K) \\ &= I - [(D + U)^{-1} + (D + L)^{-1} - (D + U)^{-1}K(D + L)^{-1}]K \\ &= I - [(D + U)^{-1} \underbrace{((D + L) + (D + U) - K)}_{= D} (D + L)^{-1}]K \end{aligned}$$

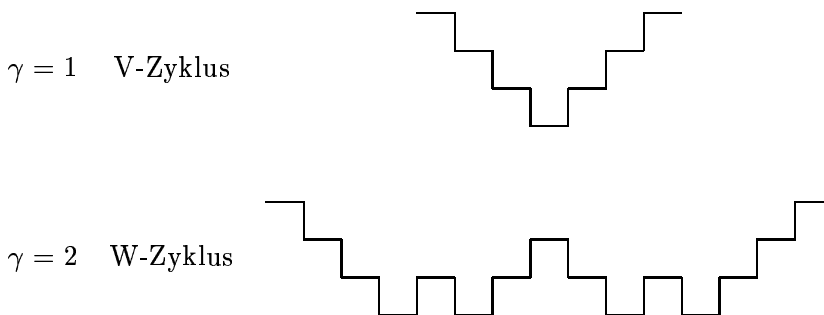
Daraus erhält man also die Behauptung.

M_{SGS} hat eine ähnliche Form wie $M_{\text{ILU}} = (D' + L')D'^{-1}(D' + U')$. Der Aufwand des symmetrischen GS-Verfahrens kann bei mehreren Glättungsschritten im wesentlichen auf den GS Aufwand gedrückt werden. Meist werden ein bis zwei Glättungsschritte gemacht, die Konvergenz ist nicht viel besser als die von unsymmetrischem GS-Verfahren.

3.1.4 Parameter des Mehrgitterverfahrens

Glättungszahlen ν_1 und ν_2 . Die Konvergenzrate ist im wesentlichen von $\nu_1 + \nu_2$ abhängig. Meist gilt $\nu_1 + \nu_2 \leq 4$, sonst ist wahrscheinlich der Glätter nicht die richtige Wahl.

Ein weiterer Parameter ist γ , welcher den Zyklus bestimmt.



Welcher Aufwand ist in Abhängigkeit von γ notwendig?

Sei n_l die Zahl der Unbekannten auf dem Gitter Ω_l . Wir nehmen eine regelmäßige Verfeinerung an, so daß gilt $n_l = 2^{dl}n_0$, wenn d die Raumdimension ist. Der Aufwand auf Level l ist linear in der Anzahl der Unbekannten, also Cn_l , wobei die Konstante $C = C(\nu_1, \nu_2, S, p)$ unabhängig vom Level ist und den Aufwand für Glätten, Defekt berechnen, Restriktion, Prolongation enthält.

Der Gesamtaufwand ergibt sich dann zu:

Level	Aufwand
Grobgitter:	Cn_0
1:	$Cn_1 + \gamma Cn_0$
2:	$Cn_2 + \gamma(Cn_1 + \gamma Cn_0)$
⋮	⋮
l:	$C \sum_{k=0}^l n_k \gamma^{l-k} = Cn_l \sum_{k=0}^l \left(\frac{\gamma}{2^d}\right)^{l-k}$

Setze $\rho = \frac{\gamma}{2^d}$. Falls $\rho < 1 \implies$ Aufwand $\mathcal{O}(n_l)$. Genauer

$$\underbrace{A(\gamma, d)}_{\text{Aufwandsfaktor}} = C \sum_{k=0}^l \rho^k < \frac{C}{1-\rho} = \frac{C}{1-\frac{\gamma}{2^d}}$$

- 1-D-Probleme

$$\gamma = 1 \quad A = 2C$$

$$\gamma = 2 \quad A = l_{\max} C \text{ hängt von der Zahl der Gitterlevel ab}$$

- 2-D-Probleme

$$\gamma = 1 \quad A = \frac{4}{3}C$$

$$\gamma = 2 \quad A = 2C$$

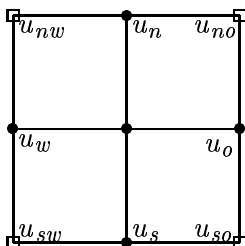
$$\gamma = 3 \quad A = 4C$$

Wenn es funktioniert, ist normalerweise der V-Zyklus die effektivste Wahl. Der W-Zyklus ist aber für bestimmte Situationen (nicht-geschachtelte Räume, Nicht-Galerkin-Situation) die richtige Wahl, während der V-Zyklus dort nicht konvergieren muß. $\gamma = 3$ kommt praktisch nicht vor.

3.2 Gittertransfer

3.2.1 Prolongation

Prolongation (Interpolation) bedeutet den Übergang vom gröberen zum feineren Gitter. Die Ordnung der Prolongation muß mindestens dieselbe wie die der Diskretisierung sein. Wir betrachten als Modellproblem die bilineare Interpolation. Eine Gitterzelle des groben Gitters mit den neu zu berechnenden Punkten des feinen Gitters sehe folgendermaßen aus:



Es gilt dann zum Beispiel für $u_s = \frac{1}{2}(u_{sw} + u_{so})$.

Als Sterne geschrieben ergibt sich die Gleichung:

$$p = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Die Implementierung sieht wie folgt aus:

for $x = 2h_l$ to $1 - 2h_l$ step $2h_l$
 for $y = 2h_l$ to $1 - 2h_l$ step $2h_l$
 $u_l(x, y) = u_{l-1}(x, y)$

for $x = h_l$ to $1 - h_l$ step $2h_l$
 for $y = 2h_l$ to $1 - 2h_l$ step $2h_l$
 $u_l(x, y) = \frac{1}{2}(u_l(x - h_l, y) + u_l(x + h_l, y))$

for $y = h_l$ to $1 - h_l$ step $2h_l$
 for $x = 0$ to 1 step h_l
 $u_l(x, y) = \frac{1}{2}(u_l(x, y - h_l) + u_l(x, y + h_l))$

3.2.2 Restriktion

1. Injektion: $r = r_{\text{inj}}$

$$(r_{\text{inj}}; d_l)(x) = d_l(x) \quad x \in \Omega_{l-1} \subset \Omega_l$$

“Weglassen von Punkten”. Eine solche Wahl der Injektion kann nur bei $\Omega_{l-1} \subset \Omega_l$ angewendet werden.

2. Voll gewichtete Restriktion (“full-weighting”)

$$r = p^T = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Ordnung der Restriktion für $r = p^T$ ist genau die Ordnung von p .

Bemerkung: Sei $2m$ die Ordnung des Differentialoperators K und m_p die Ordnung der Interpolation p . Weiter sei $r = \hat{p}^T$, wobei \hat{p} die Ordnung m_r hat. Dann muß gelten:

$$(3.2.1) \quad m_p + m_r > 2m$$

Beweis: folgt später.

3.2.3 Finite Elemente, Finite Volumen, unstrukturierte Gitter

Sei das folgende Variationsproblem gegeben:

Suche $u \in \mathcal{U}$ mit

$$(3.2.2) \quad a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

diskretisiert in dem Finite-Elemente-Raum $V_l \in V = \mathcal{U}$.

$$(3.2.3) \quad u \in V_l \quad u(x, y) = \sum_{i=1}^N u_i b_i(x, y)$$

wobei die b_i die Basisfunktionen des finite Elemente Raumes sind.

Prolongation: Abgreifen von $u(x, y)$ aus der Basisdarstellung 3.2.3. Bei linearen Elemente ergeben sich die Mittelwerte der Kanten.

Restriktion: Die Grobgitterbasisfunktion B_i läßt sich darstellen als Linearkombination der Feingitterbasen b_j :

$$B_i = \sum_j \gamma_j b_j$$

Kanonische Wahl $r = p^*$, die Restriktion ist die Adjungierte der Prolongation bzgl. des Skalarproduktes.

Galerkin Ansatz

$$(3.2.4) \quad K_{l-1} = r K_l p = r R_l K P_l p$$

P_l stellt eine Abbildung vom \mathbb{R}^{N_l} in den kontinuierlichen Sobolev-Raum dar.

3.3 Grobgittermatrix

Um die Grobgittermatrix zu erhalten gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Man verwendet eine Diskretisierung des ursprünglichen Operators auf dem groben Gitter.
2. Der Galerkinansatz 3.2.4 ermöglicht es, den Grobgitteroperator auszurechnen.

Kapitel 4

Konvergenz

In diesem Kapitel wird die Konvergenz des Mehrgitterverfahrens genauer untersucht. Ausgehend von der Konvergenz des Zweigitterverfahrens wird die Konvergenz des W-Zyklus des Mehrgitterverfahrens gezeigt.

4.1 Zweigitterverfahren

Der Zweigitteroperator ist gegeben durch

$$(4.1.1) \quad T_{2,l}(\nu_1, \nu_2) = S_l^{\nu_2} (I - pK_{l-1}^{-1}rK_l) S_l^{\nu_1}$$

Da für den Fehler

$$\|e^{(i+1)}\| \leq \|T_{2,l}(\nu_1, \nu_2)\| \cdot \|e^{(i)}\|$$

gilt, ist das Ziel zu zeigen, daß

$$\|T_{2,l}(\nu_1, \nu_2)\| \leq \zeta < 1$$

gilt. Dann würde der Fehler bei jedem Iterationsschritt kleiner und wir hätten Konvergenz. Sei $\nu = \nu_1 + \nu_2$ und wir betrachten den Zweigitteroperator

$$\begin{aligned} T_{2,l}(\nu, 0) &= \underbrace{(I - pK_{l-1}^{-1}rK_l)}_{\text{Grobitterkorrektur}} \underbrace{S_l^\nu}_{\text{Glätter}} \\ &= (K_l^{-1} - pK_{l-1}^{-1}r)K_l S_l^\nu \end{aligned}$$

Für die Norm gilt dann

$$\begin{aligned} \|T_{2,l}(\nu, 0)\| &= \|(K_l^{-1} - pK_{l-1}^{-1}r)K_l S_l^\nu\| \\ &\leq \|K_l^{-1} - pK_{l-1}^{-1}r\| \cdot \|K_l S_l^\nu\| \end{aligned}$$

Satz 4.1 *Es gelte die Approximationseigenschaft*

$$(4.1.2) \quad \|K_l^{-1} - pK_{l-1}^{-1}r\| \leq C_A h^{2m}$$

und die Glättungseigenschaft

$$(4.1.3) \quad \|K_l S_l^\nu\| \leq C_S \eta(\nu) h^{-2m} \quad \text{mit} \quad \eta(\nu) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$$

wobei $2m$ die Ordnung des Differentialoperators ist.

Dann konvergiert das Zweigitterverfahren unabhängig von h und es ist

$$(4.1.4) \quad \|T_{2,i}(\nu, 0)\| < 1 \quad \forall \nu \geq \nu_0$$

Beweis:

$$\|T_{2,i}(\nu, 0)\| \leq \|K_l^{-1} - pK_{l-1}^{-1}r\| \cdot \|K_l S_l^\nu\| \leq C_A h^{2m} \cdot C_S \eta(\nu) h^{-2m} = C_A C_S \eta(\nu)$$

4.1.1 Glättungseigenschaft

Ein Glätter ist durch $S = I - M^{-1}K = M^{-1}N$ gegeben, wobei $K = M - N$, $K = K^T$ symmetrisch positiv definit gilt. Wir fordern für die weitere Diskussion zusätzlich noch $M = M^T$ symm. pos. def., was für Jacobi und ILU (wenn $U = L^T$) gilt, für Gauß-Seidel dagegen nicht.

Uns interessiert nun der Ausdruck

$$K S^\nu = (M - N)(M^{-1}N)^\nu$$

Wir betrachten den zweiten Teil und schreiben ihn aus

$$\begin{aligned} (M^{-1}N)^\nu &= M^{-1}N M^{-1}N M^{-1}N \dots M^{-1}N \\ &= M^{-\frac{1}{2}} \underbrace{M^{-\frac{1}{2}}N M^{-\frac{1}{2}}}_{X} \underbrace{M^{-\frac{1}{2}}N M^{-\frac{1}{2}}}_{X} \dots \underbrace{M^{-\frac{1}{2}}N M^{-\frac{1}{2}}}_{X} M^{\frac{1}{2}} \\ &= M^{-\frac{1}{2}} X^\nu M^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Die Matrix X hat dieselben Eigenwerte wie S , denn es gilt $X = M^{-\frac{1}{2}}N M^{-\frac{1}{2}} = M^{\frac{1}{2}}S M^{-\frac{1}{2}}$. X und S sind über eine Äquivalenztransformation miteinander verbunden, bei der die Eigenwerte erhalten bleiben.

Das Ergebnis von oben setzen wir nun wieder ein und erhalten

$$\begin{aligned} K S^\nu &= (M - N)(M^{-1}N)^\nu = (M - N)(M^{-\frac{1}{2}}X^\nu M^{\frac{1}{2}}) \\ &= (M^{\frac{1}{2}} - N M^{-\frac{1}{2}})X^\nu M^{\frac{1}{2}} \\ &= M^{\frac{1}{2}}(I - M^{-\frac{1}{2}}N M^{-\frac{1}{2}})X^\nu M^{\frac{1}{2}} \\ &= M^{\frac{1}{2}}(I - X)X^\nu M^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Das ist ein Polynom in X . Wenn wir nun die Spektralnorm $\|\cdot\|_2$ (\mathcal{L}^2 Norm) auswerten, erhalten wir

$$\begin{aligned} \|K S^\nu\|_2 &= \|M^{\frac{1}{2}}(I - X)X^\nu M^{\frac{1}{2}}\|_2 \\ &\leq \|M\|_2 \cdot \|(I - X)X^\nu\|_2 \\ &\leq \|M\|_\infty \cdot \max_{-1 < \xi \leq 1} |(1 - \xi)\xi^\nu| \end{aligned}$$

Das Maximum läßt sich einfach durch eine Kurvendiskussion bestimmen und man erhält $\xi_{\max} = \frac{\nu}{\nu+1}$ und das Maximum nimmt dort den Wert $\frac{\nu^\nu}{(\nu+1)^{\nu+1}}$ an. Dieses Maximum ist für große ν von der Ordnung $\frac{1}{\nu}$ und geht damit gegen Null.

Als Ergebnis wird der folgende Satz formuliert

Satz 4.2 *Unter der Voraussetzung*

$$K = K^T \quad \text{positiv definit} \quad M = M^T \quad \text{positiv definit}$$

läßt sich KS^ν abschätzen durch

$$(4.1.5) \quad \|KS^\nu\|_2 \leq \|M\|_2 \cdot \eta(\nu) \quad \text{mit} \quad \eta(\nu) = \max_{\xi \in (-1,1]} |(1-\xi)\xi^\nu|$$

Lemma 4.1 *Die Funktion*

$$(4.1.6) \quad g(\xi) = |(1-\xi)\xi^\nu|$$

hat in $[-\theta, 1]$ für $\theta \in [0, 1)$ das Maximum

$$(4.1.7) \quad \max_{\xi \in [-\theta, 1]} g(\xi) = \max \left(\frac{\nu^\nu}{(\nu+1)^{\nu+1}}, (1+\theta)\theta^\nu \right) =: \eta(\nu)$$

Asymptotisch gilt

$$\max_{\xi \in [-\theta, 1]} g(\xi) = \frac{1}{\nu}$$

Beweis: folgt aus einer Kurvendiskussion.

Satz 4.3 *Sei $K = K^T > 0$ und $M = M^T > 0$. Der Glätter sei durch die Aufspaltung $K = M - N$, $S = M^{-1}N$ gegeben. Die Eigenwerte des Glätters sollen in $[-\theta, 1]$ enthalten sein für $\theta \in [0, 1)$. Ferner gelte*

$$(4.1.8) \quad \|M\|_2 \leq C_S h^{-2m}$$

Dann hat der Glätter die Glättungseigenschaft

$$(4.1.9) \quad \|KS^\nu\|_2 \leq C_S h^{-2m} \eta(\nu) \quad \text{mit} \quad \eta(\nu) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$$

$\eta(\nu)$ aus 4.1.7

Satz 4.4 *Es gelte*

$$(4.1.10) \quad \|M\|_2 \leq C_M \|K\|_2$$

in der Spektralnorm. Sei S konvergent und $K = K^T > 0$, $M = M^T > 0$. Dann erfüllt die gedämpfte Iteration

$$(4.1.11) \quad S_\omega = I - \omega M^{-1}K$$

mit $0 < \omega < 1$ die Glättungseigenschaft 4.1.9 mit $-\theta = 1 - 2\omega$.

Beweis: falls $\lambda_{\min}(S) = -1$ so folgt $\theta = 1 - 2\omega$. Sonst geht der Beweis wie für das ungedämpfte Verfahren.

Obige Sätze gehen immer von einer symmetrischen Matrix K aus. Was passiert, wenn K unsymmetrisch ist?

Sei K nun unsymmetrisch, $S_\omega = I - \omega M^{-1}K$ ein gedämpfter Glätter und $X = I - 2\omega M^{-1}K$. Dann gilt $I - X = 2\omega M^{-1}K$ und $I + X = 2S_\omega$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} KS_\omega^\nu &= \frac{1}{2\omega} M(I - X) \left(\frac{1}{2}(I + X) \right)^\nu \\ &= \frac{1}{2^{\nu+1}\omega} M(I - X)(I + X)^\nu \end{aligned}$$

Und für die Norm

$$\|KS_\omega^\nu\| \leq \frac{1}{2^{\nu+1}\omega} \|M\| \cdot \|(I-X)(I+X)^\nu\|$$

Den letzten Term kann man ausmultiplizieren und erhält

$$\begin{aligned} (I-X)(I+X)^\nu &= (I-X) \cdot \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} X^k \\ &= I - X^{\nu+1} + \sum_{k=1}^{\nu} \binom{\nu}{k} X^k - \sum_{k=0}^{\nu-1} \binom{\nu}{k} X^{k+1} \\ &= I - X^{\nu+1} + \sum_{k=1}^{\nu} \binom{\nu}{k} X^k - \sum_{k=1}^{\nu} \binom{\nu}{k-1} X^k \\ &= I - X^{\nu+1} + \sum_{k=1}^{\nu} \left(\binom{\nu}{k} - \binom{\nu}{k-1} \right) X^k \end{aligned}$$

Ist nun $\omega < \frac{1}{2}$ gilt $\|X\| \leq 1$ weil $\|S_\omega\| \leq 1$.

$$\|(I-X)(I+X)^\nu\| \leq 2 + \sum_{k=1}^{\nu} \left| \binom{\nu}{k} - \binom{\nu}{k-1} \right|$$

Für die Differenz der Binomialkoeffizienten gilt

$$\left| \binom{\nu}{k} - \binom{\nu}{k-1} \right| = \begin{cases} \binom{\nu}{k} - \binom{\nu}{k-1} & \text{falls } k = 1, \dots, \lfloor \frac{\nu+1}{2} \rfloor \\ \binom{\nu}{k-1} - \binom{\nu}{k} & \text{falls } k = \lfloor \frac{\nu+1}{2} \rfloor + 1, \dots, \nu \end{cases}$$

Die Summe ergibt sich damit als Teleskopsumme

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\nu} \left| \binom{\nu}{k} - \binom{\nu}{k-1} \right| &= 2 \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{\nu+1}{2} \rfloor} \left(\binom{\nu}{k} - \binom{\nu}{k-1} \right) \\ &= 2 \left(\binom{\nu}{\lfloor \frac{\nu+1}{2} \rfloor} - \binom{\nu}{0} \right) \\ &\leq 2 \binom{\nu}{\lfloor \frac{\nu+1}{2} \rfloor} \end{aligned}$$

Zusammengefaßt hat man dann

$$\begin{aligned} \|(I-X)(I+X)^\nu\| &\leq 2 \left(1 + \binom{\nu}{\lfloor \frac{\nu+1}{2} \rfloor} \right) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} 2^{\nu+1} \\ \|KS_\omega^\nu\| &\leq \frac{1}{2^{\nu+1}\omega} \|M\| \sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} 2^{\nu+1} = \|M\| \sqrt{\frac{2}{\pi\nu\omega^2}} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Satz 4.5 Sei K eine reguläre Matrix. Sie besitze die Aufspaltung $K = M - N$, wobei M die angenäherte Inverse ist. Der Glätter

$$(4.1.12) \quad S = I - M^{-1}K$$

ist konvergent für $Kx = b$. Ferner gelte

$$(4.1.13) \quad \|M\| \leq C\|K\|$$

Dann erfüllt der gedämpfte Glätter $S_\omega = I - \omega M^{-1}K$ die Glättungseigenschaft

$$(4.1.14) \quad \|KS_\omega^\nu\| \leq C\eta(\nu)\|K\|$$

mit $\eta(\nu) = \sqrt{\frac{2}{\omega^2\pi\nu}} \propto \frac{1}{\sqrt{\nu}}$ für $0 \leq \omega \leq \frac{1}{2}$.

4.1.2 Approximationseigenschaft

Das Ziel ist zu zeigen, daß gilt

$$\|K_l^{-1} - pK_{l-1}^{-1}r\| \leq C_A h^{2m}$$

Dazu wird der Ausdruck umgeformt.

$$\begin{aligned} K_l^{-1} - pK_{l-1}^{-1}r &= K_l^{-1} - prK_l^{-1} + prK_l^{-1} - pK_{l-1}^{-1}r \\ &= (I - pr)K_l^{-1} + p(rK_l^{-1} - K_{l-1}^{-1}r) \\ &= (I - pr)K_l^{-1} + pK_{l-1}^{-1}(K_{l-1}r - rK_l)K_l^{-1} \\ &= (I - pr)K_l^{-1} + pK_{l-1}^{-1}(K_{l-1}r - rK_lpr + rK_lpr - rK_l)K_l^{-1} \\ &= (I - pr)K_l^{-1} + pK_{l-1}^{-1}((K_{l-1} - rK_lp)r + r(K_lpr - K_l))K_l^{-1} \end{aligned}$$

Für die Norm gilt dann:

$$\begin{aligned} \|K_l^{-1} - pK_{l-1}^{-1}r\|_{0\leftarrow 0} &\leq \|K_l^{-1} - prK_l^{-1} + prK_l^{-1} - pK_{l-1}^{-1}r\| \\ &\leq \|I - pr\|_{0\leftarrow 2m}\|K_l^{-1}\|_{2m\leftarrow 0} + \|pK_{l-1}^{-1}(K_{l-1}r - rK_l)K_l^{-1}\|_{0\leftarrow 0} \\ &\leq A + \|pK_{l-1}^{-1}((K_{l-1} - rK_lp)r + rK_l(pr - 1))K_l^{-1}\|_{0\leftarrow 0} \\ &\leq A + \|p\|_{0\leftarrow 0}\|K_{l-1}^{-1}\|_{0\leftarrow -2m}(\|K_{l-1} - rK_lp\|_{-2m\leftarrow 2m}\|r\|_{2m\leftarrow 2m} + \\ &\quad \|r\|_{-2m\leftarrow -2m}\|K_l\|_{-2m\leftarrow 0}\|I - pr\|_{0\leftarrow 2m})\|K_l^{-1}\|_{2m\leftarrow 0} \\ &\leq C_A h^{2m} \end{aligned}$$

weil die folgenden Abschätzungen gelten.

Interpolation: $\|I - pr\|_{0\leftarrow 2m} \leq C_I h^{2m}$

Konsistenz: $\|K_{l-1} - rK_l p\|_{-2m\leftarrow 2m} \leq C_K h^{2m}$

Diskrete Regularität: $\|K_l^{-1}\|_{2m\leftarrow 0} \leq C_1$

“keine einspringenden Ecken”, konvexe Gebiete

$$\|K_l\|_{-2m\leftarrow 0} \leq C_2$$

genauso definiert, da K_l zweimal ableitet

$$\|r\|_{-2m\leftarrow -2m} \leq C_3$$

$$\|r\|_{2m\leftarrow 2m} \leq C_4$$

$$\|p\|_{0\leftarrow 0} \leq C_6$$

Damit kann der folgende Satz formuliert werden.

Satz 4.6 Bezeichne $\|A\|_{t \leftarrow s}$ die Norm von $A : H^s \rightarrow H^t$ wobei H^s und H^t diskrete Sobolevräume sind. Ferner gelte

$$\begin{aligned}
(4.1.15) \quad & \|I - pr\|_{0 \leftarrow 2m} \leq C_I h^{2m} \\
(4.1.16) \quad & \|K_{l-1} - rK_l p\|_{-2m \leftarrow -2m} \leq C_K h^{2m} \\
(4.1.17) \quad & \|K_l^{-1}\|_{2m \leftarrow 0} \leq C_R \\
(4.1.18) \quad & \|K_l\|_{-2m \leftarrow 0} \leq C_1 \\
(4.1.19) \quad & \|r\|_{\substack{-2m \leftarrow -2m \\ 2m \leftarrow 2m}} \leq C_3 \\
(4.1.20) \quad & \|p\|_{0 \leftarrow 0} \leq C_4
\end{aligned}$$

Dann gilt die Approximationseigenschaft

$$(4.1.21) \quad \|K_l^{-1} - pK_{l-1}^{-1}r\|_{0 \leftarrow 0} \leq C_A h^{2m}$$

4.2 Mehrgitterverfahren

Satz 4.7 Sei $\gamma \geq 2$ (W -Zyklus). Außerdem gelte

$$(4.2.1) \quad \|S_l^\nu\|_{\mathcal{U} \leftarrow \mathcal{U}} \leq C_S$$

$$(4.2.2) \quad \underline{c}_p \|u_{l-1}\|_{\mathcal{U}} \leq \|pu_{l-1}\|_{\mathcal{U}} \leq \overline{c}_p \|u_{l-1}\|_{\mathcal{U}} \quad \forall u$$

und die Glättungseigenschaft 4.1.3 und Approximationseigenschaft 4.1.2. $\zeta \in (0, 1)$ sei eine feste Zahl.

Dann existiert ein $\underline{\nu} \in \mathbb{N}$, so daß

$$(4.2.3) \quad \|T_{l,l}(\nu, 0)\|_{\mathcal{U} \leftarrow \mathcal{U}} \leq \zeta < 1$$

was bedeutet, daß der W -Zyklus mit Vorglättung in der \mathcal{U} -Norm konvergiert, und

$$(4.2.4) \quad \|T_{l,l}(\nu, 0)\|_{\mathcal{U} \leftarrow \mathcal{U}} \leq \frac{\gamma}{\gamma-1} C_S C_A \eta(\nu)$$

für alle $\nu \geq \underline{\nu}$ unabhängig von h .

Beweis: bewiesen wird nur $\|T_{l,l}(\nu, 0)\|_{\mathcal{U} \leftarrow \mathcal{U}} \leq \frac{\gamma}{\gamma-1} \zeta$ für $\|T_{2,l}(\nu, 0)\|_{\mathcal{U} \leftarrow \mathcal{U}} \leq \zeta$. Doch dazu müssen noch ein paar Lemmata formuliert werden.

Lemma 4.2

$$(4.2.5) \quad T_{l,l}(\nu, \mu) = T_{2,l}(\nu, \mu) \quad \text{für } l = 2$$

$$(4.2.6) \quad T_{l,l}(\nu, \mu) = T_{2,l}(\nu, \mu) + S_l^\mu p(T_{l-1,l-1}(\nu, \mu))^\gamma K_{l-1}^{-1} r K_l S_l^\nu$$

Beweis: Induktion nach l .

Sei o.B.d.A. $f_l = 0 \implies d_{l-1} = rK_l u_l$. Gelte nun 4.2.6 für $l-1$. Wir wollen den Operator $T_{l,l}(\nu, \mu)$ berechnen.

$$T_{l,l}(\nu, \mu) = S_l^\mu G_{l,l}(\gamma) S_l^\nu$$

wobei $G_{l,l}(\gamma)$ die Grobgitterkorrektur ist.

$T_{l-1,l-1}(\nu, \mu)$ wird berechnet ausgehend von $v_{l-1}^{(0)} = 0$. Die Iteration erfolgt dann nach der Vorschrift:

$$(4.2.7) \quad v_{l-1}^{(i+1)} = T_{l-1,l-1}(\nu, \mu)v_{l-1}^{(i)} + Q_{l-1}d_{l-1}$$

Für den Defekt setzt man nun ein $d_{l-1} = K_{l-1}v_{l-1}^{(i)}$ (wir hatten $f = 0$ angenommen).

$$v_{l-1}^{(i+1)} = (T_{l-1,l-1}(\nu, \mu) + Q_{l-1}K_{l-1})v_{l-1}^{(i)}$$

Konvergiert diese Iteration und ist v_{l-1} der Fixpunkt dieser Iteration, dann gilt die Operatorgleichung:

$$I - Q_{l-1}K_{l-1} = T_{l-1,l-1}(\nu, \mu)$$

Ersetzt man den Mehrgitteroperator $T_{l-1,l-1}(\nu, \mu)$ in obiger Iterationsformel, so erhält man

$$v_{l-1}^{(i+1)} = v_{l-1}^{(i)} - Q_{l-1}(K_{l-1}v_{l-1}^{(i)} - d_{l-1})$$

Will man die γ -te Iteration ausrechnen so erhält man durch γ -maliges Anwenden der Iterationsvorschrift 4.2.7 folgenden Ausdruck:

$$v_{l-1}^{(\gamma)} = T_{l-1,l-1}^{\gamma}(\nu, \mu)v_{l-1}^{(0)} + \sum_{k=0}^{\gamma-1} T_{l-1,l-1}^k(\nu, \mu)Q_{l-1}d_{l-1}$$

was sich vereinfachen läßt, wenn man berücksichtigt, daß $v_{l-1}^{(0)} = 0$ ist.

$$\begin{aligned} v_{l-1}^{(\gamma)} &= \sum_{k=0}^{\gamma-1} T_{l-1,l-1}^k(\nu, \mu)Q_{l-1}d_{l-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\gamma-1} T_{l-1,l-1}^k(\nu, \mu)(I - T_{l-1,l-1}(\nu, \mu))K_{l-1}^{-1}rK_l v_l \\ &= (I - T_{l-1,l-1}^{\gamma}(\nu, \mu))K_{l-1}^{-1}rK_l v_l \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Teleskopsumme ausgerechnet. Damit hat man nun die Grobgitterkorrektur:

$$G_{l,l}(\gamma) = I - p(I - T_{l-1,l-1}^{\gamma}(\nu, \mu))K_{l-1}^{-1}rK_l = I - pK_{l-1}^{-1}rK_l + pT_{l-1,l-1}^{\gamma}(\nu, \mu)K_{l-1}^{-1}rK_l$$

In den ersten beiden Summanden erkennt man die Grobgitterkorrektur des Zweigitteroperators wieder. Setzt man nun alles zusammen, erhält man die Behauptung.

$$T_{l,l}(\nu, \mu) = S_l^{\mu}G_{l,l}(\gamma)S_l^{\nu} = T_{2,l}(\nu, \mu) + S_l^{\mu}pT_{l-1,l-1}^{\gamma}(\nu, \mu)K_{l-1}^{-1}rK_lS_l^{\nu}$$

Lemma 4.3 *Gelte 4.2.1 und 4.2.2 aus Satz 4.7. Dann ist*

$$\|K_{l-1}^{-1}rK_lS_l^{\nu}\|_{U \leftarrow U} \leq c_p^{-1}(C_S + \|T_{2,l}(\nu, 0)\|_{U \leftarrow U})$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \|K_{l-1}^{-1}rK_lS_l^\nu\|_{u \leftarrow u} &\leq \underline{c_p}^{-1} \|pK_{l-1}^{-1}rK_lS_l^\nu\|_{u \leftarrow u} \\ &\leq \underline{c_p}^{-1} \|(I - pK_{l-1}^{-1}rK_l)S_l^\nu - S_l^\nu\|_{u \leftarrow u} \\ &\leq \underline{c_p}^{-1} (C_S + \|T_{2,l}(\nu, 0)\|_{u \leftarrow u}) \end{aligned}$$

Lemma 4.4 Gegeben sei die Rechenvorschrift

$$(4.2.8) \quad \zeta_1 \leq \zeta \quad \text{und} \quad \zeta_l \leq \zeta + C^* \zeta_{l-1}^\gamma$$

mit $\gamma \geq 2$, $C^* \gamma \geq 1$ und

$$(4.2.9) \quad \zeta \leq \zeta_{\max} = \frac{\gamma-1}{\gamma} (\gamma C^*)^{\frac{-1}{\gamma-1}}$$

Dann ist ζ_l durch $\zeta_l \leq \zeta^* < 1$ mit $\zeta = \zeta^* - C^*(\zeta^*)^\gamma$ und $\zeta^* \leq \frac{\gamma}{\gamma-1} \zeta$ beschränkt.

Beweis: Der Beweis geht durch Induktion nach l .

$$\zeta_{l+1} \leq \zeta + C^* \zeta_l^\gamma \leq \zeta + C^* \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \zeta \right)^\gamma$$

Im letzten Schritt haben wir die Induktionsvoraussetzung für ζ_l verwendet. Dieser Ausdruck wird nun weiter umgeformt:

$$\begin{aligned} \zeta + C^* \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \zeta \right)^\gamma &= \zeta + C^* \left(\frac{\gamma^\gamma}{(\gamma-1)^\gamma} \zeta^\gamma \right) \\ &= \zeta \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} + C^* \frac{\gamma^{\gamma-1}}{(\gamma-1)^{\gamma-1}} \zeta^{\gamma-1} \right) \end{aligned}$$

Nun braucht man die Voraussetzung 4.2.9 für $\zeta^{\gamma-1}$ um den letzten Ausdruck nach oben abzuschätzen.

$$\zeta \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} + C^* \frac{\gamma^{\gamma-1}}{(\gamma-1)^{\gamma-1}} \frac{(\gamma-1)^{\gamma-1}}{\gamma^\gamma C^*} \right) = \zeta \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \right) = \zeta \frac{\gamma}{\gamma-1}$$

ζ_l ist also für alle l beschränkt durch $\zeta^* = \frac{\gamma}{\gamma-1} \zeta$.

Beweis: zu Satz 4.7

wegen Lemma 4.2 gilt:

$$\begin{aligned} \|T_{l,l}(\nu, 0)\|_{u \leftarrow u} &\leq \|T_{2,l}(\nu, 0)\|_{u \leftarrow u} + \|p\|_{u \leftarrow u} \|T_{l-1,l-1}(\nu, 0)\|_{u \leftarrow u}^2 \|K_{l-1}^{-1}rK_lS_l^\nu\|_{u \leftarrow u} \\ &\leq \|T_{2,l}(\nu, 0)\|_{u \leftarrow u} + C^* \|T_{l-1,l-1}(\nu, 0)\|_{u \leftarrow u}^2 \end{aligned}$$

mit $C^* = \overline{c_p} c_p^{-1} (C_S + 1)$ wegen Lemma 4.3. Damit genügt $\|T_{l,l}(\nu, 0)\|$ einer Ungleichung vom Typ 4.2.8. Das Lemma 4.4 liefert dann die Behauptung.

Kapitel 5

Nichtlineare Mehrgitterverfahren

5.1 Einführung

Gegeben sei ein nichtlineares Problem

$$(5.1.1) \quad K(u) = f \quad \text{in } \Omega \quad + \text{Randbedingungen}$$

Zuerst wird das Problem diskretisiert und man erhält

$$(5.1.2) \quad K_l(u_l) = f_l \quad \text{in } \Omega_l \quad + \text{Randbedingungen}$$

diese diskrete Gleichung wird linearisiert zu

$$(5.1.3) \quad K_l(u_l^{(i-1)})U_l^{(i)} = f_l$$

Sei K_l' die Jacobi-Matrix,

$K_l(u_h)$ der nichtlineare diskrete Operator, z.B.

$$K_l(u_h) = h^{-2} \begin{bmatrix} & -1 & & \\ -1 & 4 + h^2 u_h & -1 & \\ & -1 & & \end{bmatrix}$$

$\mathcal{K}_l(u_h)$ der linearisierte diskrete Operator/Matrix, z.B.

$$\mathcal{K}_l(u_h) = h^{-2} \begin{bmatrix} & -1 & & \\ -1 & 4 + h^2 u_h^{(i)} & -1 & \\ & -1 & & \end{bmatrix}$$

Fixpunktiteration:

$$u_{h,FP}^{(i+1)} = u_{h,FP}^{(i)} - \mathcal{K}_l(u_{h,FP}^{(i)})^{-1} (K_l(u_l^{(i)}) - f_l)$$

Newtoniteration:

$$u_{h,N}^{(i+1)} = u_{h,N}^{(i)} - K_l'(u_{h,N}^{(i)})^{-1} (K_l(u_l^{(i)}) - f_l)$$

Beide Iterationsvorschriften lassen sich umformen in

- Newton:

$$(5.1.4) \quad K'_l(u_{h,N}^{(i)})(u_{h,N}^{(i+1)} - u_{h,N}^{(i)}) = -K_l(u_l^{(i)}) + f_l$$

womit sich quadratische Konvergenz erreichen läßt:

$$\|u_h^{(i+1)} - u_h\| \leq C \|u_h^{(i)} - u_h\|^2$$

Die Vorteile des Newtonverfahrens sind die superlineare (quadratische) Konvergenz, allerdings ist der Aufwand je Schritt groß und der Einzugsbereich klein.

- Fixpunkt:

$$(5.1.5) \quad \mathcal{K}_l(u_{h,FP}^{(i)})(u_{h,FP}^{(i+1)} - u_{h,FP}^{(i)}) = -K_l(u_l^{(i)}) + f_l$$

Hier erhält man nur lineare Konvergenz

$$\|u_h^{(i+1)} - u_h\| \leq \kappa \|u_h^{(i)} - u_h\|$$

Das Fixpunktverfahren hat den Vorteil eines größeren Einzugsbereiches und eines kleineren Aufwandes je Schritt. Als Nachteil stellt sich die lineare Konvergenz heraus.

5.2 Das Newton-Mehrgitterverfahren

Algorithmus:

Startvektor $u_l^{(0)}$;

Defekt $d_l^{(j)} := K_l(u_l^{(j)}) - f_l$

Löse $A_l(u_l^{(j)})v_l = d_l^{(j)}$ mit Mehrgitterverfahren

$u_l^{(j+1)} = u_l^{(j)} - v_l$

mit $A_l(u) = K'_l(u)$ bei Newton- und $\mathcal{K}_l(u)$ bei Fixpunktiteration.

Bemerkung:

- Die Jacobimatrix $K'_l(u)$ kann durch Näherungen ersetzt werden, dies hat zumeist den Verlust der quadratischen Konvergenz zur Folge.
- Für lineare Konvergenz des Gesamtverfahrens genügt eine feste Anzahl von Mehrgitterschritten. Für quadratische Konvergenz des Newtonverfahrens muß ziemlich genau gelöst werden. Die Anzahl der Mehrgitterschritte muß deshalb sukzessive gesteigert werden (verdoppelt).
- Dämpfung der nichtlinearen Iteration erweitert deren Einzugsbereich, muß jetzt auf Mehrgitter abgestimmt werden. (siehe Bank, Rose, Mathematical Computation 1982)

Problem: Grobgittermatrix $K_{l-1}(u_{l-1})$

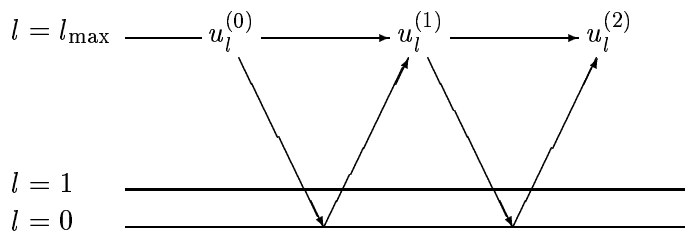
- entweder direkt über Galerkin-Ansatz

$$K_{l-1} = rK_l(u_l^{(i)})p$$

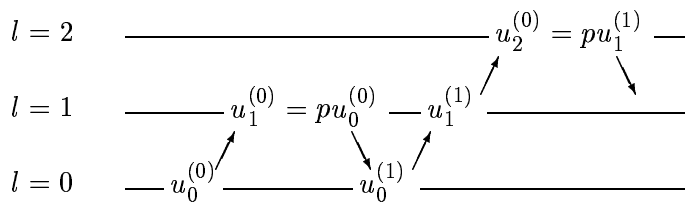
was zu den algebraischen Mehrgitterverfahren führt (AMG).

- oder Ankerlösung $u_{l-1}^{(i)}$ auf Ω_{l-1}

bisher:



jetzt geschachtelte Iteration (nested iteration)



- Ankerlösung auf grobem Gitter kann durch eine geschachtelte Iteration berechnet werden.

Kapitel 6

Mehrgitterverfahren für singulär gestörte Probleme

Definition 6.1 Ein Differentialoperator $K(\epsilon) = K_1 + \epsilon K_2$ heißt singulär gestört, wenn der Typ von K_1 und K_2 verschieden ist.

6.1 Anisotrope Probleme

Als Beispiel betrachten wir den anisotropen Laplaceoperator, der bei der Behandlung von anisotropen Medien, geschichteten Medien auftritt. Ähnliche Effekte treten auch bei der Verwendung von anisotropen Gittern bei der Diskretisierung auf.

$$(6.1.1) \quad -\Delta_\epsilon = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \epsilon \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

Für $\epsilon \rightarrow 0$ tritt ein Typwechsel des Operators von elliptisch zu undefiniert auf.

Bisher war die Steifigkeitsmatrix K nicht parameterabhängig und das diskrete System K_h hing nur von h ab. Die Forderung an das MGV war, daß die Konvergenzrate κ unabhängig von h sein soll.

Jetzt ist $K = K(\epsilon)$ und damit $K_h = K_h(\epsilon)$. Die Forderung ist nun analog, daß $\kappa = \kappa(h, \epsilon) < \kappa_0 < 1$ unabhängig von h und ϵ ist.

Definition 6.2 Sei $\kappa = \kappa(h, \epsilon)$ die Konvergenzrate des Mehrgitterverfahrens. Das Verfahren heißt $K_1(\epsilon)$ -robust, falls gilt:

$$\kappa(h, \epsilon) < \kappa_0 < 1 \quad \forall \epsilon \geq 0, h$$

Wir betrachten ein Modellproblem:

$$(6.1.2) \quad -\Delta_\epsilon u = f \quad \text{in } \Omega = (0, 1)^2 \quad \text{und} \quad u|_{\partial\Omega} = g$$

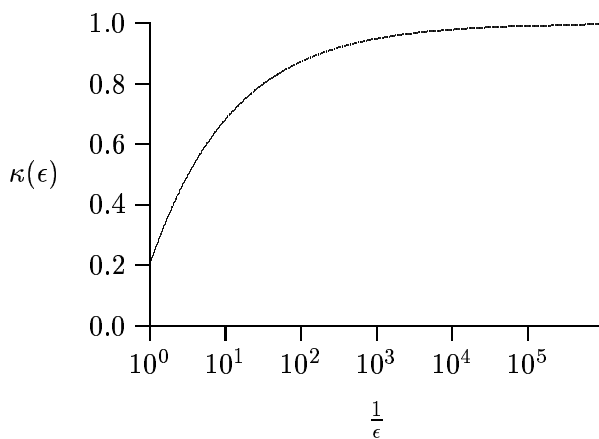
Diese Differentialgleichung wird mit Differenzenverfahren diskretisiert:

$$(6.1.3) \quad -\Delta_\epsilon = h^{-2} \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{bmatrix} + h^{-2}\epsilon \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = h^{-2} \begin{bmatrix} & -\epsilon & \\ -1 & 2(1+\epsilon) & -1 \\ & & -1 \end{bmatrix} =: K_h(\epsilon)$$

Für $\epsilon = 0$ wird $K_h(0)$ zu einer Tridiagonalmatrix.

$$K_h(0) = h^{-2} \begin{bmatrix} & & 0 & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & \\ & & & & 0 \\ & & & & \end{bmatrix} = h^{-2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Wendet man ein übliches Mehrgitterverfahren mit symmetrischen Gauß-Seidel-Glätter auf den anisotropen Laplaceoperator an, erhält man folgende Konvergenzraten:



Warum ist die Konvergenz so schlecht?

Der Fünfpunktstern für den anisotropen Laplaceoperator sieht folgendermaßen aus:

$$K_l(\epsilon) = h^{-2} \begin{bmatrix} & & -\epsilon & & \\ & & -1 & 2(1+\epsilon) & -1 \\ & & & & \\ & & & & -\epsilon \\ & & & & \end{bmatrix}$$

Ist nun $\epsilon \ll 1$ so wird dieser Stern annähernd zu

$$K_l(0) = h^{-2} \begin{bmatrix} & & 0 & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & \\ & & & & 0 \\ & & & & \end{bmatrix}$$

Es findet also keine Glättung in y -Richtung mehr statt.

Wie läßt sich dieses Problem beheben? Betrachten wir die Approximationseigenschaft:

$$\|K_l^{-1}(\epsilon) - pK_{l-1}^{-1}(\epsilon)r\| \leq C_A \cdot \frac{h^2}{\epsilon}$$

Das Problem ist, dass dies gegen ∞ geht, wenn ϵ gegen Null geht. Das heißt das Verfahren konvergiert nicht mehr, oder nur sehr schlecht. Es gibt nun zwei Lösungsmöglichkeiten für das Problem:

1. Semi-Coarsening (Halbvergrößerung) Es wird das Gitter nur in x -Richtung vergrößert, in y -Richtung bleibt die Gitterweite gleich. Dies ist wie anschaulich klar wird nur auf regelmäßigen Gittern und damit einfachen Geometrien möglich.
2. robuster Glätter: Wir versuchen, einen Glätter so zu konstruieren, dass für die Glättungseigenschaft gilt:

$$\|K_l S_l^\nu\| \leq C_S \cdot \eta(\nu) \cdot \frac{\epsilon}{h^2}$$

Dass dies möglich ist, sagt der folgende Satz.

Satz 6.1 Sei $K_l(\epsilon) = M - N$ (mit $M^T = M > 0$ für alle ϵ) symmetrisch und positiv definit für $\epsilon > 0$. Weiter gelte:

$$\begin{aligned} \exists \alpha > 2 \quad \text{so dass} \quad K_l(\epsilon) + \alpha N &\geq 0 \quad \text{pos. semidef.} \\ \|S\| &\leq 1 \\ \|N(\epsilon)\| &\leq \epsilon \cdot h^{-2} \cdot C_N \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\|K_l(\epsilon) S^\nu\| \leq C_S \cdot h_l^{-2} \cdot \epsilon \cdot \eta(\nu)$$

mit $\eta(\nu) = \eta_0(\nu - 1, \frac{1}{(\alpha-1)^\nu})$.

Was bedeutet die Bedingung $K + \alpha N \geq 0$?

Da K positiv definit ist, ist die Bedingung auf jeden Fall erfüllt, wenn N positiv semidefinit ist. Allerdings ist N nicht immer positiv semidefinit, z.B. bei der ILU erhält man eine indefinite Restmatrix. Was bedeutet die Bedingung dann?

$$\begin{aligned} 0 &\leq K + \alpha N = M - N + \alpha N \\ &= M + (\alpha - 1)N \\ 0 &\leq I + (\alpha - 1)M^{-1}N \\ -I &\leq (\alpha - 1)M^{-1}N \\ -I &\leq (\alpha - 1)S \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass der kleinste Eigenwert von S größer als -1 sein muß.

Beweis: Es sei der Glätter $S = I - M^{-1}K = M^{-1}N$ gegeben. Dann gilt für die Glättungseigenschaft

$$\begin{aligned} \|K S^\nu\| &= \rho(K S^\nu) = \rho(K (M^{-1}N)^\nu) \\ &= \rho(M(I - M^{-1}N)(M^{-1}N)^\nu) \\ &= \rho(M^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} (I - M^{-1}N) M^{-1} N M^{-1} N \dots M^{-1} N M^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}) \\ &= \rho(M^{\frac{1}{2}} (I - M^{-\frac{1}{2}} N M^{-\frac{1}{2}}) (M^{-\frac{1}{2}} N M^{-\frac{1}{2}})^\nu M^{\frac{1}{2}}) \\ &= \rho(M^{\frac{1}{2}} (I - X) X^\nu M^{\frac{1}{2}}) \\ &= \rho(M^{\frac{1}{2}} (I - X) X^{\nu-2} M^{-\frac{1}{2}} N M^{-\frac{1}{2}} M^{-\frac{1}{2}} N) \\ &= \rho((I - X) X^{\nu-2} M^{-1} N^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \rho((M^{-\frac{1}{4}}NM^{-\frac{1}{4}})(I-X)X^{\nu-2}(M^{-\frac{1}{4}}NM^{-\frac{1}{4}})) \\
&= \|(M^{-\frac{1}{4}}NM^{-\frac{1}{4}})(I-X)X^{\nu-2}(M^{-\frac{1}{4}}NM^{-\frac{1}{4}})\|_2 \\
&\leq \|(I-X)X^{\nu-2}\| \cdot \|M^{-\frac{1}{4}}NM^{-\frac{1}{4}}\|^2 \\
&= \|(I-X)X^{\nu-2}\| \cdot \rho(M^{-\frac{1}{2}}N^2M^{-\frac{1}{2}}) \\
&= \|(I-X)X^{\nu-2}\| \cdot \rho(M^{-1}N \cdot N) \\
&\leq \|(I-X)X^{\nu-2}\| \cdot \|M^{-1}NN\| \leq \|(I-X)X^{\nu-2}\| \cdot \|M^{-1}N\| \|N\| \\
&= \|(I-X)X^{\nu-2}\| \cdot \|S\| \cdot \|N\| \leq \|(I-X)X^{\nu-2}\| \cdot C \cdot C_N \epsilon h^{-2}
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann aus dem folgenden Lemma.

Lemma 6.1 *Sei X symmetrisch und $-\Theta \cdot I \leq X \leq 1$. Dann gilt*

$$\|(I-X)X^\nu\| \leq \eta(\nu, \Theta) = \max\left(\frac{\nu^\nu}{(\nu+1)^{\nu+1}}, (1+\Theta)\Theta^\nu\right)$$

Beweis: Es gilt $\|(I-X)X^\nu\| = \rho((I-X)X^\nu) = \max_{[-\Theta, 1]}(1-x)x^\nu$. Die Behauptung folgt aus einer Kurvendiskussion von $f(x) = (1-x)x^\nu$ im Intervall $[-\Theta, 1]$.

Wir betrachten nun die unvollständigen Zerlegungen (ILU) für das anisotrope Problem genauer. Zuerst wird die Systemmatrix K wie immer zerlegt $K = M - N$, wobei M leicht invertierbar sein soll, also die Struktur $M = (L + D)D^{-1}(L + D)^T$. Die Matrix $K(\epsilon)$ sieht folgendermaßen aus:

$$K(\epsilon) = h^{-2} \cdot \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2(1+\epsilon) & -1 & & & -\epsilon & & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & -1 & 2(1+\epsilon) & & & -\epsilon \\ \hline -\epsilon & & & & 2(1+\epsilon) & -1 & & \\ & \ddots & & & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -\epsilon & & & -1 & 2(1+\epsilon) \end{array} \right)$$

Macht man nun einen ersten Schritt der vollständigen Gauß-Zerlegung, erhält man das fol-

gende Ergebnis:

$$K(\epsilon) = h^{-2} \cdot \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2(1+\epsilon) & -1 & & & -\epsilon & & & \\ & 0 & \frac{4(1+\epsilon)^2-1}{2(1+\epsilon)} & -1 & \boxed{-\frac{\epsilon}{2(1+\epsilon)}} & -\epsilon & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & -1 & 2(1+\epsilon) & & & -\epsilon \\ \hline 0 & \boxed{-\frac{\epsilon}{2(1+\epsilon)}} & & & \frac{4(1+\epsilon)^2-\epsilon^2}{2(1+\epsilon)} & -1 & & \\ & & \ddots & & -1 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & & -\epsilon & & -1 & 2(1+\epsilon) \end{array} \right)$$

Die eingerahmten Matrixeinträge sind der Fill-in und werden weggelassen, und damit in die Restmatrix verlagert. Dann treten Änderungen nur in den Diagonaleinträgen auf, es genügt also nur die Diagonalmatrix D abzuspeichern. $D = \text{diag}\{d_{ij}\}$ (Achtung: i, j entsprechen der Lage im Gitter, Zeile i , Spalte j , nicht in der Matrix) Die d_{ij} sehen aus wie folgt:

$$d_{ij} = \begin{cases} 2(1+\epsilon) & \text{für } i=1, j=1 \\ 2(1+\epsilon) - \frac{1}{d_{i,j-1}} & \text{für } i=1, j>1 \\ 2(1+\epsilon) - \frac{\epsilon^2}{d_{i-1,j}} & \text{für } i>1, j=1 \\ 2(1+\epsilon) - \frac{1}{d_{i,j-1}} - \frac{\epsilon^2}{d_{i-1,j}} & \text{für } i>1, j>1 \end{cases}$$

Die Restmatrix N besteht aus den weggelassenen Einträgen

$$N = h^{-2} \begin{bmatrix} \gamma_{i+1,j-1} & & \\ & 0 & \\ & & \gamma_{i-1,j+1} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \gamma_{i-1,j+1} &= \frac{\epsilon}{d_{i-1,j}} \\ \gamma_{i+1,j-1} &= \frac{\epsilon}{d_{i,j-1}} \end{aligned}$$

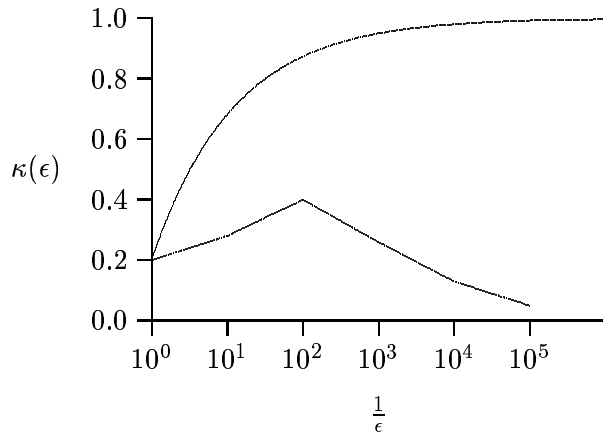
Die d_{ij} sind rekursiv definiert und der Fixpunkt δ der Rekursion ist:

$$\begin{aligned} \delta &= 2(1+\epsilon) - \frac{1-\epsilon^2}{\delta} = \frac{2(1+\epsilon)\delta - (1+\epsilon^2)}{\delta} \\ \delta^2 - 2(1+\epsilon)\delta + 1 + \epsilon^2 &= 0 \\ \delta_{1,2} &= 1 + \epsilon \pm \sqrt{2\epsilon} \end{aligned}$$

Man wählt die positive Wurzel und erhält für die Zeilensummennorm der Restmatrix N :

$$\|N\|_{\infty} \leq \frac{2\epsilon}{\delta} \cdot h^{-2} < 2\epsilon \cdot h^{-2}$$

Für die Konvergenzraten ergibt sich dann:



ILU löst das Problem besser, hat allerdings den Makel, dass der Peak für $h \rightarrow 0$ gegen 1 geht. Dies läßt sich beheben, indem eine modifizierte ILU verwendet. Und zwar werden die Diagonaleinträge so modifiziert, dass die Eigenwerte von S nach rechts wandern und die Modifikation mit $\mathcal{O}(\epsilon)$ geht.

$$d_{ij}^{\text{neu}} = \begin{cases} d_{ij}^{\text{alt}} + \beta\gamma_{i+1,j-1} \\ d_{ij}^{\text{alt}} + \beta\gamma_{i-1,j+1} \\ d_{ij}^{\text{alt}} + \beta(\gamma_{i+1,j-1} + \gamma_{i-1,j+1}) \end{cases}$$

Damit wird die Diagonale verstärkt und die Eigenwerte werden nach rechts verschoben. Es gilt dann $\lambda_{\min}(S_\beta) \geq -\theta > -1$ und alle Bedingungen sind erfüllt.

Eine weitere Möglichkeit, Robustheit zu erreichen ist die Lösung mit einem Blockverfahren.

$$K_h = h^{-2} \begin{pmatrix} D_1 & L_2^T & 0 \\ L_2 & D_2 & L_3^T \\ 0 & L_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

mit

$$D_i = \begin{pmatrix} 2(1+\epsilon) & -1 & 0 \\ -1 & 2(1+\epsilon) & -1 \\ 0 & -1 & 2(1+\epsilon) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L_i = \begin{pmatrix} -\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon \end{pmatrix}$$

Beim Block-Jacobi-Verfahren verwendet man nun die Block-Diagonalmatrix als M und rechnet dann wie bekannt $x_{\text{neu}} = x_{\text{alt}} - M^{-1}(Kx_{\text{alt}} - f)$. Die Restmatrix N ist

$$N = h^{-2} \begin{pmatrix} 0 & -L_2^T & 0 \\ -L_2 & 0 & -L_3^T \\ 0 & -L_3 & 0 \end{pmatrix}$$

womit klar ist dass gilt: $\|N\|_\infty \leq 2h^{-2}\epsilon$. Damit hat man also auch eine robusten Glätter.

6.2 Konvektions-Diffusions-Gleichung

Ein weiteres Beispiel für ein singular gestörtes Problem ist die Konvektions-Diffusionsgleichung.

$$\frac{du}{dt} = \underbrace{-\epsilon \cdot \Delta u}_{K_2} + \underbrace{\vec{c} \cdot \nabla u}_{K_1}$$

mit dem Diffusionsterm K_2 und dem Konvektions- oder Strömungsterm K_1 . Hier tritt ein Typwechsel von parabolisch zu hyperbolisch auf. (Wir nehmen im folgenden $\|\vec{c}\| = 1$ an. Ein Beispiel für die Anwendung dieser Gleichung tritt auf, wenn man Tinte in laminar strömendes Wasser gibt.

Das erste Problem bei der Behandlung dieser Differentialgleichung ist die Diskretisierung. Der Laplaceoperator wird wie gewohnt mit dem Fünfpunktstern diskretisiert. Die gewohnte Diskretisierung der Ableitungen im Gradienten mit zentralen Differenzen führt allerdings zu Problemen, wie man im Folgenden sieht.

$$\begin{aligned} & -\epsilon h^{-2} \begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix} + \frac{c_1}{2h} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{c_2}{2h} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\ & = h^{-2} \begin{bmatrix} & \epsilon + \frac{h}{2}c_2 & \\ \epsilon - \frac{h}{2}c_1 & -4\epsilon & \epsilon + \frac{h}{2}c_1 \\ & \epsilon - \frac{h}{2}c_2 & \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Untersucht man diese Matrix auf ihre Eigenschaften, z.B. die Diagonaldominanz, so erhält man unter der Voraussetzung $c_1 \geq 0$ und $c_2 \geq 0$

$$\begin{aligned} q &= 4\epsilon - \left| \epsilon - \frac{h}{2}c_1 \right| - \left| \epsilon + \frac{h}{2}c_1 \right| - \left| \epsilon - \frac{h}{2}c_2 \right| - \left| \epsilon + \frac{h}{2}c_2 \right| \\ &= 4\epsilon - \left| \epsilon - \frac{h}{2}c_1 \right| - \epsilon - \frac{h}{2}c_1 - \left| \epsilon - \frac{h}{2}c_2 \right| - \epsilon - \frac{h}{2}c_2 \end{aligned}$$

Man kann nun zwei Fälle unterscheiden:

1. $\epsilon \geq \frac{h}{2}c_1$ und $\epsilon \geq \frac{h}{2}c_2$

Dann ist $q = 0$ und die Matrix ist schwach diagonaldominant. Da sie aufgrund der Randbedingungen irreduzibel ist, ist sie ein M-Matrix. Es gilt also allgemein, dass ein M-Matrix entsteht, wenn h klein genug ist.

2. $\epsilon < \frac{h}{2}c_1$

Dann gilt

$$\begin{aligned} q &= 4\epsilon + \epsilon - \frac{h}{2}c_1 - \epsilon - \frac{h}{2}c_1 + \dots \\ &= 4\epsilon - hc_1 + \dots \\ &= 2\epsilon - hc_1 + \underbrace{2\epsilon - \dots}_{\leq 0} \\ &\leq 2\epsilon - hc_1 < 0 \end{aligned}$$

womit die Matrix nicht diagonaldominant ist.

Die Konsequenz ist, dass man den Gradienten auf eine andere Art diskretisieren muss. Wir wähle eine einseitige Differenz, gegen den Strom (“upwind”). Z.B. gilt für $c_1 > 0$ (Strömung nach rechts):

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h}$$

was zwar im Vergleich zu den zentralen Differenzen nur von der Ordnung $\mathcal{O}(h)$ ist, dagegen ist diese Diskretisierung aber immer stabil. Als Stern geschrieben:

$$\begin{aligned} c_1 > 0 : & \quad c_1 h^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ c_1 < 0 : & \quad c_1 h^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Durch diese Diskretisierung wird die Diagonale verstärkt und die Diagonaldominanz wird erreicht und eine M-Matrix entsteht, die stabil ist.

Beispiel: $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Differentialgleichung lautet dann:

$$-\epsilon \Delta u + \frac{\partial u}{\partial x} = f$$

und läßt sich diskretisieren zu:

$$\begin{aligned} K_h &= \epsilon \cdot h^{-2} \begin{bmatrix} & -1 & & \\ -1 & 4 & -1 & \\ & -1 & & \end{bmatrix} + h^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= h^{-2} \begin{bmatrix} & -\epsilon & & \\ -\epsilon - h & 4\epsilon + h & -\epsilon & \\ & -\epsilon & & \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Für $\epsilon = 0$ wird diese Matrix von GS und ILU exakt gelöst, falls die Nummerierung der Strömung folgt. Dieses “downwind-numbering” wird im Folgenden beschrieben. Es kann nur durchgeführt werden, wenn die Strömung keine Wirbel hat, bzw. wenn der Abhängigkeitsgraph zyklensfrei ist.

Definition 6.3 Die Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ sei gegeben. Der Graph $G := \{\mathcal{K}, \mathcal{L}\}$ mit $\mathcal{K} = \{1, \dots, n\}$ sind die Knoten des Graphen und $\mathcal{L} = \{(i, j) | a_{ij} \neq 0\}$ ist die Menge der Verbindungen (Kanten) heißt der Abhängigkeitsgraph.

Nimmt man die zentralen Differenzen, so sieht der Abhängigkeitsgraph wie folgt aus, weil die Matricelemente a_{ij} mit $j = i + 1$ und $j = i - 1$ für $i = 1, \dots, n$ ungleich Null sind. Dadurch sind alle Punkte vorwärts und rückwärts miteinander verbunden.

Bei einseitigen Differenzen sind nur die Matricelemente mit $j = i - 1$ und die Diagonalelemente ungleich Null, weshalb die Punkte nur in die Strömungsrichtung miteinander verbunden sind.

Die Nummerierung bedeutet das Anordnen des Graphen. Hat der Graph G keine Zyklen, dann definiert die Strömung eine Halbordnung auf G . Sei ein wirbelfreies Geschwindigkeitsfeld $\vec{c} = (c_1, c_2)^T$ vorgegeben. Seien i, j Knoten von G . Dann gilt: Die Knoten i und j seien verbunden durch die Kante (i, j) . (i, j) ist einlaufend, wenn $a_{ij} > 0$.

Der Algorithmus für das Stromab (downwind) Nummerieren lautet dann:

1. Ordne jeder Kante in \mathcal{L} die durch das upwind Schema gegebene Richtung zu.
2. Setze $n = \text{Anzahl der Knoten}$
3. Ordne jedem Knoten $k \in \mathcal{K}$ die Zahl der einlaufenden Kanten zu $\rightarrow \mathcal{I}(k)$.
Sei $\mathcal{I}(k) = 0 \forall k \in \mathcal{K}$. (Initialisieren)
4. Suche alle minimalen Elemente $k \in \mathcal{K}$ bzgl. $\mathcal{I}(k)$ (Ausgangsknoten) und speichere sie in Fifo F .
5. Schleife (über mehrere einströmende Elemente): Solange ($F \neq \emptyset$): Hole k aus F
Setze $\mathcal{I}(k) = 1$, lege k in den Fifo P und setze $i = 1$
Schleife: Solange ($P \neq \emptyset$) und $i < n$: hole k aus P :
Schleife über alle Nachbarn l von k :
wenn (l stromab von k) und $\mathcal{I}(l) \leq \mathcal{I}(k)$
{ $i = \mathcal{I}(l) = \mathcal{I}(k) + 1$, lege l in P }
Achtung: Knoten können in P mehrfach enthalten sein (Das macht aber nichts, weil n eine endliche Zahl an Nachbarknoten ist und jeder Knoten auch maximal so oft in P stehen kann (worst case).)
6. Rufe quicksort mit der Knotenliste \mathcal{K} und dem Kriterium $l < k$, wenn $\mathcal{I}(l) < \mathcal{I}(k)$.
Das hat die Komplexität $\mathcal{O}(n^{\frac{3}{2}})$, was sich zu $\mathcal{O}(n)$ verbessern läßt, wenn man anstatt quicksort eine Tiefensuche verwendet. Ausgabe ist eine angeordnete Knotenliste.

Wir erhalten K_h als Dreiecksmatrix, d.h. GS oder ILU lösen exakt für $\epsilon = 0$.

Problem: Beweis funktioniert nicht mehr! (Approximationseigenschaft) (Das ist ein Beweisartefakt, welches in der Realität nicht auftritt. In praxi ist das ein robustes Verfahren.

Beispiel: $c(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

MGV: V-Zyklus, $\nu_1 = \nu_2 = 1$, Gauß-Seidel Konvergenzraten, gemittelt über 10 Schritte (adaptiv verfeinert, level 7, ca. 15000 Punkte)

$$\epsilon = 10^{-2} \quad \kappa = 0,2$$

$$\epsilon = 10^{-4} \quad \kappa = 0,05 \quad \text{GS löst also exakter.}$$

$$\epsilon = 10^{-6} \quad \kappa = 0,036$$

Frage: Geht das auch wenn $\vec{c}(x, y)$ im Gebiet stark variiert? D.h. es gibt Bereiche, in denen Diffusion und andere in denen Konvektion vorherrscht.

2. Beispiel:

$$\vec{c} = (1 - \sin(\alpha)(2(x + \frac{1}{4}) - 1) + 2 \cos(\alpha) \cdot (y - \frac{1}{4}))^4 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Kapitel 7

Mehrgitterverfahren für gekoppelte Systeme von partiellen Differentialgleichungen

7.1 Einführung

Man erhält aus der Diskretisierung eines Systems gekoppelter partieller Differentialgleichungen die folgende Systemmatrix:

$$(7.1.1) \quad K = \begin{pmatrix} K_{11} & \dots & K_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{m1} & \dots & K_{mm} \end{pmatrix} \quad K_{ij} \text{ ist eine } n \times n \text{ Matrix}$$

Das Gleichungssystem lautet dann in Vektor-Matrix-Schreibweise:

$$Ku = f \quad \text{mit} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

Bsp: Stokes-Gleichung (gilt für kriechende Strömung)

$$-\Delta \vec{u} + \nabla p = f \quad \text{Impulserhaltung}$$

$$\nabla \vec{u} = 0 \quad \text{Massenerhaltung}$$

Hierbei gilt $u \in H^1$, $p \in \mathcal{L}^2 = H^0$ und damit $f \in H^{-1}$.

$m = 2, 3, 4$ je nach Raumdimension. Man erhält dann die Systemmatrix

$$K = \begin{pmatrix} -\Delta & \nabla \\ \nabla^T & 0 \end{pmatrix}$$

deren Form bekannt ist und als eine Optimierungsmatrix identifiziert werden kann. Diese Matrizen treten bei Sattelpunktproblemen auf und sind indefinit. Es stellt sich die Frage, wann solche Gleichungssysteme eindeutig lösbar sind.

Führt man eine Block-Gauß-Zerlegung durch, erhält man

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -B^T A^{-1} B \end{pmatrix}$$

K ist regulär, wenn A und $B^T A^{-1} B$ regulär sind. $B^T A^{-1} B$ heißt Schurkomplement. Für Stokes: $B^T A^{-1} B = -\operatorname{div} \Delta^{-1} \nabla$

$$-\nabla^T \Delta^{-1} \nabla = \begin{pmatrix} \partial_x & \partial_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x^2 + \partial_y^2 & 0 \\ 0 & \partial_x^2 + \partial_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix}$$

Mit $u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ erhält man dann:

$$\begin{aligned} -\Delta u_x &+ \frac{\partial p}{\partial x} = f_x \\ -\Delta u_y &+ \frac{\partial p}{\partial y} = f_y \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} &+ \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

Die Matrix $B = \nabla$ ist nicht regulär. Mit Dimension $d = 2$ gilt $\vec{u} \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Damit folgt dann $f \in H^{-1}(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ und $p \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. Das Schurkomplement ist also eine Abbildung von \mathcal{L}^2 nach \mathcal{L}^2 , also vom "Druckraum" in den "Druckraum".

Sei nun $W = H^1 \times H^1$. Zerlege W wie folgt:

$$W = \operatorname{Kern}(B^T) + \underbrace{(\operatorname{Kern}(B^T))^\perp}_{\substack{\text{auf diesem Teil-} \\ \text{raum } W' \text{ existiert} \\ \text{die Umkehrung} \\ B^{-1}}}$$

Die Abbildung $A^{-1}B$ ist regulär, weil A regulär ist. Wenn $B^T A^{-1} B p = 0 \Rightarrow A^{-1} B p \in \operatorname{Kern}(B^T)$, wenn $B^T A^{-1} B p \neq 0 \Rightarrow A^{-1} B p \in (\operatorname{Kern}(B^T))^\perp$ und eine Umkehrung ist möglich. Allgemeiner gilt die Babuška-Brezzi-Bedingung (Brezzi 1973):

$$\inf_{0 \neq v \in W} \sup_{0 \neq w \in P} \frac{(Bw, v)_{W' \times W}}{\|w\|_{\mathcal{L}^2=P} \cdot \|v\|_W} \geq \beta > 0$$

Stabilität: Sei W diskretisiert durch W_h , P durch P_h .

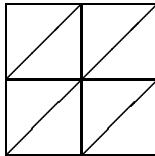
Lemma 7.1 Sei $n = \dim W_h$, $m = \dim P_h$. Dann gilt:

Notwendig für die Stabilität von $K_h = \begin{pmatrix} A_h & B_h \\ B_h^T & 0 \end{pmatrix}$ ist $m \leq n$.

Beweis: Die Stabilität fordert K_h regulär, was $\text{Rang}(K_h) \leq n + \text{Rang}(B_h)$ bedeutet. B_h ist eine $n \times m$ Matrix. Falls $m > n$ so folgt $\text{Rang}(B_h) \leq n < m \Rightarrow \text{Rang}(K_h) \leq n + n = 2n < n + m$. Da K_h eine $(m + n) \times (m + n)$ Matrix ist, folgt dass K_h singulär ist. Für eine reguläre Matrix muß also $m \leq n$ sein.

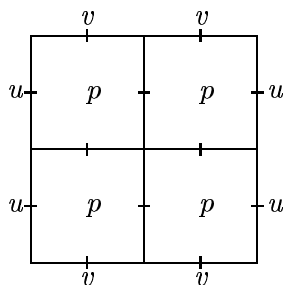
Beispiel: Diskretisieren der Stokes-Gleichungen auf $(0, 1)^2$.

1. u_x, u_y mit linearen Elementen auf Dreiecken, p mit linearen Elementen auf Dreiecken.



Die Dimension von W_h , also des Ansatzraumes von \vec{u} ist 2, weil nur der mittlere Punkt frei ist, die Randpunkte sind alle durch die Randbedingung vorgegeben. Die Dimension des Druckraumes ist 8, weil der Druck keiner Randbedingung unterliegt (also es 9 Unbekannte gibt). Allerdings ist der Gesamtdruck festgelegt durch die Bedingung $\int_{\Omega} p = 0$. Deshalb erhält man 8 Unbekannte. Mit dem obigen Lemma folgt also, dass diese Diskretisierung instabil ist.

2. W_h wieder mit linearen Elementen, aber für die Druckdiskretisierung werden konstante Elemente gewählt, die konstant auf einem Dreieck sind. Dadurch erhält man $8 - 1 = 7$ Unbekannte. Die Diskretisierung ist immer noch instabil.
3. W_h mit bilinearen finiten Elementen auf Vierecken, P_h konstant auf Vierecken des Gitters mit Schrittweite $2h$. Es gibt also nur eine Unbekannte für den Druck. Diese Diskretisierung ist nun stabil.
4. Taylor-Hood: W_h quadratisch, P_h linear ergibt auch eine stabile Diskretisierung. u wird quadratisch diskretisiert mit $u = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$. Man benutzt also drei Knoten und drei Seitenmitten, um die sechs Koeffizienten zu bestimmen. Man erhält dann für jedes Dreieck eine Basisfunktion für jede Raumrichtung, also insgesamt ist die Dimension des Ansatzraumes für die Lösung gleich 16. Für den Druckraum erhält man dagegen nur Dimension 8.
5. Gestaffeltes Gitter (Harlow-Welch, 1965) Differenzenverfahren für Stokes
Bestimmt man \vec{u} und p in denselben Knoten, so erhält man $n = 2$ und $m = 8$, was nicht stabil ist. Besser ist es, den Druck p immer im Mittelpunkt des Elements zu nehmen und die Komponenten von $\vec{u} = (u, v)^T$ auf den Seitenmitten.



Man erhält also $m < n$ und damit eine stabile Diskretisierung, deren Fehler $\mathcal{O}(h^2)$ ist.

7.2 Transformierende Glätter

Problem: Wenn man die Systemmatrix

$$K = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$$

mit einem Glätter bearbeiten will, so kann man die bisherigen Verfahren (Jacobi, Gauß-Seidel, etc.) nicht verwenden, da in der Diagonale Nullen stehen, die zu einer singulären Matrix M führen würden. Wie konstruiert man eine Glätter für K ?

Idee: Suche eine Transformation

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} \end{pmatrix}$$

so daß

$$K\bar{K} = \begin{pmatrix} A\bar{K}_{11} + B\bar{K}_{21} & A\bar{K}_{12} + B\bar{K}_{22} \\ B^T\bar{K}_{11} & B^T\bar{K}_{12} \end{pmatrix}$$

“vernünftig” ist, d.h. geeignet für Jacobi etc. Dazu muß in erster Linie das Element $B^T\bar{K}_{12}$ sinnvoll gewählt werden. Um die Konvergenz des Verfahrens nicht zu verschlechtern, darf die Ordnung nicht erhöht werden.

Ein Vorschlag für die Transformation \bar{K} ist: $\bar{K}_{11} = I$, $\bar{K}_{21} = 0$, $\bar{K}_{12} = B$. Was hat man damit gewonnen? Wir berechnen $(K\bar{K})_{12} = AB + B\bar{K}_{22}$. Da dieser Eintrag in der Matrix $K\bar{K}$ am besten Null sein sollte, wählt man $\bar{K}_{22} = -A$. Wir erhalten dann

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & -A \end{pmatrix}$$

und damit

$$K\bar{K} = \begin{pmatrix} A & AB - BA \\ B^T & B^T B \end{pmatrix} \implies \widetilde{K\bar{K}} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B^T & B^T B \end{pmatrix}$$

Angewendet auf Stokes:

$$\widetilde{K\bar{K}} = \begin{pmatrix} -\Delta_u & 0 \\ \nabla_p^T & \nabla_p^T \nabla_p \end{pmatrix}$$

wobei $\nabla_p^T \nabla_p = \Delta_p$ der Laplaceoperator im Druckraum ist. Auf die so entstandene Matrix ist z.B. ein Jacobi-Verfahren anwendbar. Betrachten wir im Allgemeinen die Iteration.

$$x_{\text{neu}} = x_{\text{alt}} - M^{-1}(Kx_{\text{alt}} - f)$$

K ist hier die Originalsystemmatrix. Sei

$$(7.2.2) \quad K\bar{K} = M - N$$

Multiplikation von rechts mit \bar{K}^{-1} ergibt:

$$(7.2.3) \quad K = \underbrace{M\bar{K}^{-1}}_{\substack{\text{neue angenäherte} \\ \text{Inverse}}} - N\bar{K}^{-1}$$

Der transformierende Glätter gehorcht also der Iterationsgleichung:

$$(7.2.4) \quad \begin{aligned} x_{\text{neu}} &= x_{\text{alt}} - (M\bar{K}^{-1})^{-1}(Kx_{\text{alt}} - f) \\ &= x_{\text{alt}} - \bar{K}M^{-1}(Kx_{\text{alt}} - f) \end{aligned}$$

Transformierendes Jacobi-Verfahren:

1. Berechne Defekt

$$d = Kx_{\text{alt}} - b \quad \text{mit} \quad d = \begin{pmatrix} d_u \\ d_v \\ d_p \end{pmatrix}$$

2. Berechne

$$y = M^{-1}d \quad \text{mit} \quad y = \begin{pmatrix} y_u \\ y_v \\ y_p \end{pmatrix}$$

3. Berechne

$$y := \bar{K}y$$

also

$$\begin{aligned} y_u &= y_u + \frac{\partial y_p}{\partial x} \\ y_v &= y_v + \frac{\partial y_p}{\partial y} \\ y_p &= \Delta y_p \end{aligned}$$

4. $x := x - y$

Lemma 7.2 *Konvergiert die transformierende Iteration 7.2.4, so ist ihr Fixpunkt Lösung der Ausgangsgleichung $Kx = b$.*

Achtung: \bar{K} und M müssen regulär sein!

Wann konvergiert die TI (transformierende Iteration) S_{TI} ?

$$S_{\text{TI}} = I - \bar{K}M^{-1}K$$

Die Iteration für das Produktsystem $K\bar{K}$ lautet:

$$S_P = I - M^{-1}K\bar{K}$$

Das Produktsystem konvergiert wenn $K\bar{K}$ eine M-Matrix ist und M eines der Standardverfahren. Für S_{TI} gilt dann:

$$\begin{aligned} S_{\text{TI}} &= I - \bar{K}M^{-1}K = \bar{K}(\bar{K}^{-1} - M^{-1}K) \\ &= \bar{K}(I - M^{-1}K\bar{K})\bar{K}^{-1} = \bar{K}S_P\bar{K}^{-1} \end{aligned}$$

S_{TI} hat also dieselben Eigenwerte wie das Produktsystem S_P . S_{TI} geht also durch eine Äquivalenztransformation aus S_P hervor.

Lemma 7.3 *Die transformierende Iteration 7.2.4 ist spektraläquivalent zur Produktiteration*

$$(7.2.5) \quad S_P = I - M^{-1}K\bar{K}$$

Sie konvergiert also genau dann, wenn die Produktiteration konvergiert.

Wie konstruiert man \bar{K} ?

So, daß $K\bar{K}$ vom Typ $\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$ ist. Man führt eine unvollständige Blockzerlegung durch und erhält

$$K\bar{K} = \underbrace{\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}}_{=L} \iff K = L \underbrace{\bar{K}^{-1}}_{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}}$$

Daraus erhält man für \bar{K} die Form

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} I & * \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Mit

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{K} = \begin{pmatrix} I & \bar{K}_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

erhält man

$$L = K\bar{K} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{11}\bar{K}_{12} + K_{12} \\ K_{21} & K_{21}\bar{K}_{12} + K_{22} \end{pmatrix} \implies \begin{array}{l} K_{11}\bar{K}_{12} + K_{12} = 0 \\ C := K_{21}\bar{K}_{12} + K_{22} \quad \text{vernünftig} \end{array}$$

Daraus erhält man

$$\bar{K}_{12} = -K_{11}^{-1}K_{12}$$

und damit

$$C = K_{21}(-K_{11}^{-1}K_{12}) + K_{22} = K_{22} - \underbrace{K_{21}K_{11}^{-1}K_{12}}_{\text{Schurkomplement}}$$

Ersetze \bar{K} durch \tilde{K} , bzw. K_{11}^{-1} durch \tilde{M}_{11}^{-1} , etwa ILU, Jacobi, GS etc.

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} I & -K_{11}^{-1}K_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} \longrightarrow \tilde{K} = \begin{pmatrix} I & -\tilde{M}_{11}^{-1}K_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Die einfachste Möglichkeit ist auch hier das Jacobi-Verfahren: $\tilde{M}_{11} = D = \text{diag}K_{11}$
 Damit wird zwar $(K\bar{K})_{12} = W \neq 0$, aber es ist einfach berechenbar. Z.B. für Navier-Stokes-Gleichungen mit SIMPLE (Patanka, Spaldung 1972). Es gibt zahlreiche Verfahren, die sich nur in der Wahl des \tilde{M}_{11} unterscheiden. (SIMPLE C, SIMPLE R, ...)

Wie groß ist der Fehler durch inexaktes Vorgehen?

Der Fehler besteht darin, dass wir die Matrix K_{11}^{-1} durch \tilde{M}_{11}^{-1} ersetzen. In Matrizen geschrieben:

$$K\bar{K} = \begin{pmatrix} K_{11} & 0 \\ K_{21} & C \end{pmatrix} \text{ wird } K\tilde{K} = \begin{pmatrix} K_{11} & -K_{11}\tilde{M}_{11}^{-1}K_{12} + K_{12} \\ K_{21} & K_{22} - K_{21}\tilde{M}_{11}^{-1}K_{12} \end{pmatrix}$$

Angewendet auf die Stokes-Gleichungen ergibt sich ausgehend von

$$K = \begin{pmatrix} -\Delta & \nabla \\ \nabla^T & 0 \end{pmatrix}$$

wobei die Operatoren Abbildungen zwischen den folgenden Räumen sind:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}^1 \rightarrow \mathcal{H}^{-1} & \mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{H}^{-1} \\ \mathcal{H}^1 \rightarrow \mathcal{L}^2 & \mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{L}^2 \end{pmatrix}$$

Damit folgt

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} I & -\Delta^{-1}\nabla \\ 0 & I \end{pmatrix} \text{ und } K\bar{K} = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ \nabla^T & -\nabla^T\Delta^{-1}\nabla \end{pmatrix}$$

womit Gauß-Seidel und Jacobi konvergieren.

7.3 Kollektive Glätter (Punkt-Block-Glätter)

Wir wollen nun die Systemmatrix K nicht gleichungsweise, sondern punktweise sortieren.

$$K = \begin{pmatrix} k_{1,1} & \dots & k_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n,1} & \dots & k_{n,n} \end{pmatrix} \text{ mit } k_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,m} \end{pmatrix}$$

wobei n die Anzahl der Punkte und m die Anzahl der unbekanntenen Funktionen in dem gekoppelten Differentialgleichungssystem ist.

Z.B. gilt für den Stofftransport folgende Differentialgleichung:

$$(7.3.6) \quad -\nabla \cdot (D\nabla u - \vec{v} \cdot u) = f$$

oder in Matrixform

$$\begin{pmatrix} -\nabla(D\nabla - v_x) & 0 & 0 \\ 0 & -\nabla(D\nabla - v_y) & 0 \\ 0 & 0 & -\nabla(D\nabla - v_z) \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \vec{f}$$

In Punkt-Block-Form

$$K_{\text{trans}} = (k_{i,j})_{i,j=1}^n \quad \text{mit} \quad k_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{i,j} & 0 & 0 \\ 0 & a_{i,j} & 0 \\ 0 & 0 & a_{i,j} \end{pmatrix}$$

wobei $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ die Diskretisierung von 7.3.6 ist.

Z.B. gilt für die Stokes-Gleichungen

$$K_{\text{Stokes}} = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 & \partial_x \\ 0 & -\Delta & \partial_y \\ -\partial_x & -\partial_y & 0 \end{pmatrix}$$

Diskretisiert erhält man dann die Systemmatrix K_{Stokes}

$$K_{\text{Stokes}} = (k_{i,j})_{i,j=1}^n \quad \text{mit} \quad k_{i,j} = \begin{pmatrix} (-\Delta_h)_{i,j} & 0 & (\partial_{x_h})_{i,j} \\ 0 & (-\Delta_h)_{i,j} & (\partial_{y_h})_{i,j} \\ -(\partial_{x_h})_{i,j} & -(\partial_{y_h})_{i,j} & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrizen $k_{i,j}$ sind instabil, deshalb wird auf die Null rechts unten ein kleiner Betrag addiert. Es ergibt sich dann

$$\begin{pmatrix} -\Delta_h & 0 & \partial_{x_h} \\ 0 & -\Delta_h & \partial_{y_h} \\ -\partial_{x_h} & -\partial_{y_h} & \boxed{\omega h^2 \Delta_h} \end{pmatrix}$$

wobei der eingerahmte Teil zur Stabilisierung dient. Das ω hängt von der Gitterweite und den verwendeten Elementen ab, z.B. $\omega = \frac{1}{12}fh$. Die einzelnen Einträge werden wie bekannt diskretisiert:

$$-\Delta_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \partial_{x_h} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \partial_{x_h} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Damit erhält man dann als Matrix

$$\begin{bmatrix} & k_{x,x+h} & \\ k_{x-h,x} & k_{x,x} & k_{x+h,x} \\ & k_{x,x-h} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega h^2 \end{pmatrix} & \\ \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -h \\ 0 & -1 & 0 \\ h & 0 & \omega h^2 \end{pmatrix} & \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & h \\ 0 & 4 & h \\ -h & -h & -4\omega h^2 \end{pmatrix} & \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega h^2 \end{pmatrix} \\ & \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -h \\ 0 & h & \omega h^2 \end{pmatrix} & \end{bmatrix}$$

Darauf wird nun z.B. ein Punkt-Block-Jacobi-Glätter angewendet.

$$u^{\text{neu}} = u^{\text{alt}} + D^{-1}(f - Ku^{\text{alt}})$$

mit

$$D = \begin{pmatrix} k_{1,1} & & \\ & \ddots & \\ & & k_{n,n} \end{pmatrix}$$

oder ein Punkt-Block-Gauß-Seidel-Glätter

$$u^{\text{neu}} = u^{\text{alt}} + (D + L)^{-1}(f - Ku^{\text{alt}})$$

mit

$$D + L = \begin{pmatrix} k_{1,1} & & \\ \vdots & \ddots & \\ k_{n,1} & \dots & k_{n,n} \end{pmatrix}$$

Eine Möglichkeit der Diskretisierung ist die auf dem gestaffelten Gitter, wie am Ende von 7.1 schon beschrieben.

Die Komponenten der Geschwindigkeit werden in den Seitenmitten berechnet. Und zwar die Geschwindigkeitskomponente in x -Richtung in den Seitenmitten der Seiten, die in y -Richtung verlaufen und umgekehrt für die Geschwindigkeitskomponente in y -Richtung. Der Druck wird immer elementweise genommen. Ein Element wird nun als Block behandelt und als ganzes upgedatet.

→ Sammele alle Unbekannten pro Element $(u_1, u_2, v_1, v_2, p_0)$

→ invertiere diesen 5×5 Block exakt.

Bei GS werden die Geschwindigkeitskomponenten u und v zweimal korrigiert, der Druck nur einmal.

Diese Methode stammt von Vanka (1985).

Kapitel 8

Heterogene Probleme

8.1 Einführung

Man beobachtet eine sehr langsame Konvergenz des Mehrgitterverfahrens bei heterogenen Problemen. Es wird wieder die Differentialgleichung

$$-\nabla(D\nabla u) = f \quad \text{in } \Omega = (0, 1)^2 \quad + \text{ Randbedingungen}$$

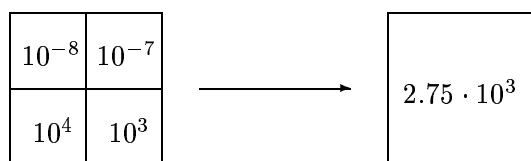
behandelt. Diesmal ist jedoch $D \neq 1$, D ist ortsabhängig, es gilt

$$D(x, y) = D_{ij} \quad \text{für } (i-1)h \leq x < ih \quad \text{und} \quad (j-1)h \leq y < jh$$

D ist also konstant in einer Gitterzelle des feinsten Gitters. Die D_{ij} werden z.B. durch einen Zufallsgenerator erzeugt.

	10^{-9}	1	0.1		
	10^5		3	10^4	

Das Grundproblem bei Mehrgitterverfahren kommt hier deutlich zum Vorschein: Wie kann man einen sinnvollen Grobgitteroperator konstruieren? Welche D_{ij} sollen verwendet werden? Vielleicht geht es mit gemittelten Koeffizienten.



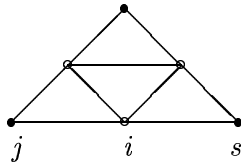
Die Durchlässigkeit in vertikaler Richtung ist aber viel kleiner als der Mittelwert! Physikalisch ist der Mittelwert also nicht sinnvoll.

Es existiert eine mathematische Theorie zur Homogenisierung. Diese hat allerdings sehr starke Voraussetzungen und ist deshalb in der Praxis selten anwendbar.

Eine Alternative dazu sind die algebraischen Multilevel-Verfahren.

8.2 Algebraische Multilevel-Verfahren

Der Galerkin-Ansatz $K_{l-1} = rK_l p$ entspricht einer Transformation von K_l in eine Basis auf dem groben Gitter. Wie werden die Transferoperatoren gewählt? (Prolongation, Restriktion)



$$(pu)_i = p_{ij}u_j^c + p_{is}u_s^c$$

mit

$$p_{ij} = \frac{|k_{ij}|}{|k_{ij}| + |k_{is}|} \quad \text{und} \quad p_{is} = \frac{|k_{is}|}{|k_{ij}| + |k_{is}|}$$

Die hochgestellten c bedeuten coarse, also grobes Gitter.

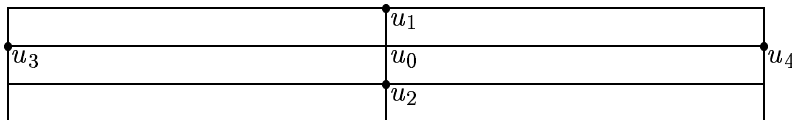
Die Motivation für dieses Vorgehen ist die folgende Rechnung

$$k_{ij}u_i = -k_{ij}u_j - k_{is}u_s - k_{ir}u_r$$

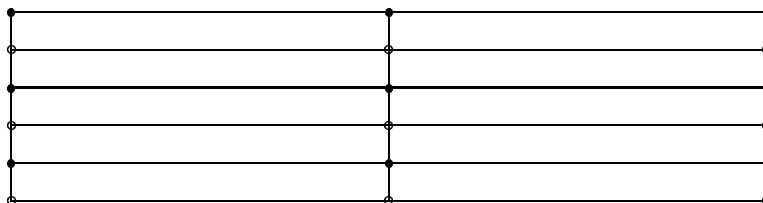
Normalerweise wird $r = p^T$ gewählt. (Dann ist K_{l-1} symmetrisch wenn K_l symmetrisch ist.) Bei unsymmetrischen Matrizen kann das zu Problemen führen.

Eine weitere Freiheit ist die Wahl der groben Gitter, bzw. der Knoten, die auf dem nächst größeren Gitter existieren.

Eine Anwendung ist die Diskretisierung des Δ -Operators auf anisotropem Gitter oder die Diskretisierung von $-\Delta_\epsilon$ auf regelmäßigem Gitter.



Die Diskretisierung führt auf eine Matrix K , bei der die Kopplungen k_{01} und k_{02} wesentlich größer sind als die Kopplung k_{03} und k_{04} . Der Feingitterpunkt u_0 wird sich besser aus u_1 und u_2 interpolieren lassen als aus u_3 und u_4 . Man erhält also bei der Umkehrung (Restriktion) das folgende Grobgitter:



wobei die ausgefüllten Punkte auf dem Grobgitter bleiben. Es wird also nur in eine Richtung vergrößert.

Das resultierende Grobgitter sieht dann folgendermaßen aus:



Dieses Verfahren ist auf unstrukturierte Gitter verallgemeinerbar.