Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

# Mathematik für Studierende der Bioinformatik 2

(Übung zu B-MBI-2, Sommersemester 2016)

Dr. A. Vogel, Prof. Dr. G. Wittum

## Aufgabenblatt 9 (Abgabe: Di., 21.6., 12:15h)

**Aufgabe 1** (Induzierte Norm, 3 Punkte)
Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Skalarproduktraum über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\to \mathbb{R}, \\ \mathbf{v} &\mapsto \|\mathbf{v}\| := \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \end{aligned}$$

eine Norm ist, indem Sie die Normeigenschaften nachweisen.
**Hinweis:** Sie dürfen die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung verwenden.

**Aufgabe 2** (Äquivalenz von Normen im $\mathbb{R}^n$, 3 Punkte)
Zeigen Sie, dass für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_2$$

**Hinweis:** Sie dürfen die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung verwenden.

**Aufgabe 3** (Illustration von Normen im $\mathbb{R}^2$, 3 Punkte)
Zeichnen Sie alle Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, für die gilt

$$\text{(i)} \quad \|\mathbf{x}\|_1 = 1, \qquad \text{(ii)} \quad \|\mathbf{x}\|_2 = 1, \qquad \text{(iii)} \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = 1.$$

**Aufgabe 4** (Maximumsnorm, 3 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Maximumsnorm

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}, \\ \mathbf{x} &\mapsto \|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\} \end{aligned}$$

eine Norm ist.

**Aufgabe 5** (Gram-Schmidt im $\mathbb{R}^3$, 3 Punkte)
Gegeben sei eine Basis des $\mathbb{R}^3$ durch

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie mit dem Verfahren von Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis.

**Aufgabe 6** (Gram-Schmidt im Funktionenraum, 5 Punkte)
Zu dem Intervall $[-1, 1]$ seien die stetigen Funktionen

$$\mathbf{v}_1 := 1, \quad \mathbf{v}_2 := x, \quad \mathbf{v}_3 := x^2,$$

betrachtet. Diese bilden eine Basis $(1, x, x^2)$ des Raums $V := \operatorname{span}(1, x, x^2) \subset \mathcal{C}([-1, 1]; \mathbb{R})$ und für Funktionen $f, g \in V$ ist ein Skalarprodukt und die induzierte Norm gegeben durch

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\ dx,$$
$$\|f\| := \left( \int_{-1}^{1} (f(x))^2\ dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(i) Berechnen Sie die Norm von $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

(ii) Finden Sie mittels des Verfahrens von Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$.