Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Mathematik für Studierende der Bioinformatik 2

(Übung zu B-MBI-2, Sommersemester 2016)

Dr. A. Vogel, Prof. Dr. G. Wittum

Aufgabenblatt 5 (Abgabe: Di., 24.5., 12:15h)

Aufgabe 1 (Isomorphismen, 4 Punkte)
Sei $\Phi : V \mapsto \widetilde{V}$ ein Isomorphismus zwischen zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumen $V, \widetilde{V}$ und sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, so dass man zusätzlich eine lineare Abbildung $\widetilde{f} : \widetilde{V} \to \widetilde{V}$ konstruieren kann gemäß

$$\widetilde{f} := \Phi \circ f \circ \Phi^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{v}} \mapsto \widetilde{f}(\tilde{\mathbf{v}}) := \Phi(f(\Phi^{-1}(\tilde{\mathbf{v}}))).$$

Zeigen Sie:

(i) Sind $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ linear unabhängig, so sind auch die Bilder unter dem Isomorphismus, $\Phi(\mathbf{v}_1), \ldots, \Phi(\mathbf{v}_k) \in \widetilde{V}$, linear unabhängig.

(ii) Gilt $\widetilde{f}(\tilde{\mathbf{v}}) = \alpha\tilde{\mathbf{v}}$ für einen Vektor $\tilde{\mathbf{v}} \in \widetilde{V}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$, so gilt auch $f(\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{v}$ für einen Vektor $\mathbf{v} \in V$.

Aufgabe 2 (Koordinatentransformation, 6P)
Betrachten Sie zum $\mathbb{R}^2$ drei verschiedene Basen

$$\mathcal{E} = (\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}), \quad \mathcal{B} = (\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}), \quad \mathcal{C} = (\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}).$$

(Dabei sind die Vektoren bzgl. der kanonischen Basis $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ notiert).

(i) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen

  (a) $\mathbf{T}_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ und $\mathbf{T}_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$,
  (b) $\mathbf{T}_{\mathcal{C},\mathcal{E}}$ und $\mathbf{T}_{\mathcal{E},\mathcal{C}}$,
  (c) $\mathbf{T}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ und $\mathbf{T}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

(ii) Berechnen Sie die Koordinaten von

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \text{ in der Basis } \mathcal{B} \text{ und } \mathcal{C},$$

$$\text{und von} \quad \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ in der Basis } \mathcal{E} \text{ und } \mathcal{C}.$$

(iii) Berechnen Sie das Produkt $\mathbf{T}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \cdot \mathbf{T}_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 3 (Matrixdarstellung, 10 Punkte)
Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ und $W = \mathbb{R}$ sowie die Integration eines Polynoms $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ auf dem Interval $[0, 1]$,

$$\mathcal{I} : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}, \quad p \mapsto \int_0^1 p(x)\ dx,$$

als eine lineare Abbildung aufgefasst. Seien die Basen

(a) $\mathcal{B}_V = (1, x, x^2)$ und $\mathcal{B}_W = (1)$,

(b) $\widetilde{\mathcal{B}}_V = (2, x + 1, x + x^2)$ und $\widetilde{\mathcal{B}}_W = (2)$

gegeben.

(i) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von $\mathcal{I}$ bezüglich der Basen:

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}_W,\mathcal{B}_V}(\mathcal{I}) \quad \text{und} \quad \mathbf{M}_{\widetilde{\mathcal{B}}_W,\widetilde{\mathcal{B}}_V}(\mathcal{I}).$$

(ii) Bestimmen Sie vom Polynom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ (mit $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$) die Koordinaten bezüglich der Basen:

$$\mathbf{x} = \Phi^{-1}_{\mathcal{B}_V}(p) \quad \text{und} \quad \widetilde{\mathbf{x}} = \Phi^{-1}_{\widetilde{\mathcal{B}}_V}(p).$$

(iii) Bestimmen Sie die Anwendung der Matrix auf die jeweilige Koordinatendarstellung:

$$r = \mathbf{M}_{\mathcal{B}_W,\mathcal{B}_V}(\mathcal{I}) \cdot \mathbf{x} \quad \text{und} \quad \widetilde{r} = \mathbf{M}_{\widetilde{\mathcal{B}}_W,\widetilde{\mathcal{B}}_V}(\mathcal{I}) \cdot \widetilde{\mathbf{x}}.$$

(iv) Bestimmen Sie das Ergebnis $\mathcal{I}(p) \in \mathbb{R}$ durch Berechnung von

$$\Phi_{\mathcal{B}_W}(r) \quad \text{und} \quad \Phi_{\widetilde{\mathcal{B}}_W}(\widetilde{r}).$$

Hinweis: Den Körper $\mathbb{R}$ kann man als (sehr einfachen) Vektorraum über $\mathbb{R}$ auffassen. Dieser Vektorraum hat nur eine Dimension und die Standardbasis ist die Zahl $1 \in \mathbb{R}$. Man kann natürlich aber auch eine andere Zahl $b \in \mathbb{R}$ als Basis wählen. Dann hat ein Element dieses Vektorraums $v \in \mathbb{R}$ die Darstellung $v = \frac{v}{b} \cdot b$.