Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Mathematik für Studierende der Bioinformatik 2

(Übung zu B-MBI-2, Sommersemester 2016)

Dr. A. Vogel, Prof. Dr. G. Wittum

Aufgabenblatt 2 (Abgabe: Di., 3.5., 12:15h)

Aufgabe 1 (Rechenregeln für Matrizen, 8 Punkte)
Seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ Matrizen.

(i) Zeigen Sie, dass gilt:

(a) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$,

(b) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$,

(c) $\mathbb{1}_m \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbb{1}_n = \mathbf{A}$.

(ii) Geben Sie zwei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ an, für die $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ gilt, und zeigen Sie für Ihre Wahl diese Ungleichheit.

(iii) Geben Sie zwei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ an, für die $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T$ gilt, und zeigen Sie für Ihre Wahl diese Ungleichheit.

Aufgabe 2 (Rang von Matrizen, 6 Punkte)
Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen und begründen Sie Ihre Antwort.

(i) $\mathbf{A}_1 := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (ii) $\mathbf{A}_2 := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

(iii) $\mathbf{A}_3 := \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 8 & 1 & 6 \\ 12 & 8 & 10 & 0 \end{pmatrix}$ (iv) $\mathbf{A}_4 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3 (Lösbarkeitskriterium nach Fontené, Rouché und Frobenius, 4P)
Bestimmen Sie zu der Matrix

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

mittels des Lösbarkeitskriterium nach Fontené, Rouché und Frobenius, ob das Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ eine Lösung $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ für die folgenden rechten Seiten $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ besitzt:

$$\text{(i)} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (Rang bei Produkt und Summe von Matrizen, 2P)
Seien die folgenden drei Matrizen gegeben

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Gilt die Ungleichung

$$\operatorname{Rang}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \operatorname{Rang}(\mathbf{A}) + \operatorname{Rang}(\mathbf{B})$$

für $\mathbf{A} = \mathbf{M}_1, \mathbf{B} = \mathbf{M}_2$ und $\mathbf{A} = \mathbf{M}_2, \mathbf{B} = \mathbf{M}_3$?

(ii) Gilt die Ungleichung

$$\operatorname{Rang}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \leq \min\{\operatorname{Rang}(\mathbf{A}), \operatorname{Rang}(\mathbf{B})\}$$

für $\mathbf{A} = \mathbf{M}_1, \mathbf{B} = \mathbf{M}_2$ und $\mathbf{A} = \mathbf{M}_2, \mathbf{B} = \mathbf{M}_3$?