

Mathematik für Studierende der Bioinformatik 2

(Übung zu B-MBI-2, Sommersemester 2017)

Dr. K. Xylouris

Aufgabenblatt 6 (Abgabe: Do., 8.6., 15:45h)

Aufgabe 1 (Induzierte Norm, 3 Punkte)

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Skalarproduktraum über \mathbb{R} . Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \mathbf{v} &\mapsto \|\mathbf{v}\| := \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \end{aligned}$$

eine Norm ist, indem Sie die Normeigenschaften nachweisen.

Hinweis: Sie dürfen die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung verwenden.

Aufgabe 2 (Äquivalenz von Normen im \mathbb{R}^n , 3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_2$$

Hinweis: Sie dürfen die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung verwenden.

Aufgabe 3 (Illustration von Normen im \mathbb{R}^2 , 3 Punkte)

Zeichnen Sie alle Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, für die gilt

$$(i) \quad \|\mathbf{x}\|_1 = 1, \quad (ii) \quad \|\mathbf{x}\|_2 = 1, \quad (iii) \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = 1.$$

Aufgabe 4 (Maximumsnorm, 3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Maximumsnorm

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \mathbf{x} &\mapsto \|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\} \end{aligned}$$

eine Norm ist.

Aufgabe 5 (Gram-Schmidt im \mathbb{R}^3 , 3 Punkte)

Gegeben sei eine Basis des \mathbb{R}^3 durch

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie mit dem Verfahren von Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis.

Aufgabe 6 (Gram-Schmidt im Funktionenraum, 5 Punkte)

Zu dem Intervall $[-1, 1]$ seien die stetigen Funktionen

$$\mathbf{v}_1 := 1, \quad \mathbf{v}_2 := x, \quad \mathbf{v}_3 := x^2,$$

betrachtet. Diese bilden eine Basis $(1, x, x^2)$ des Raums $V := \text{span}(1, x, x^2) \subset \mathcal{C}([-1, 1]; \mathbb{R})$ und für Funktionen $f, g \in V$ ist ein Skalarprodukt und die induzierte Norm gegeben durch

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx,$$
$$\|f\| := \left(\int_{-1}^1 (f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- (i) Berechnen Sie die Norm von $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.
- (ii) Finden Sie mittels des Verfahrens von Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$.