Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Mathematik für Studierende der Bioinformatik 2

(Übung zu B-MBI-2, Sommersemester 2017)

Dr. K. Xylouris

Aufgabenblatt 3 (Abgabe: Do., 18.5., 14:15h)

Aufgabe 1 (Matrixdarstellung, 10 Punkte)
Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ und $W = \mathbb{R}$ sowie die Integration eines Polynoms $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ auf dem Interval $[0, 1]$,

$$\mathcal{I} : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}, \quad p \mapsto \int_0^1 p(x)\ dx,$$

als eine lineare Abbildung aufgefasst. Seien die Basen

(a) $\mathcal{B}_V = (1, x, x^2)$ und $\mathcal{B}_W = (1)$,

(b) $\widetilde{\mathcal{B}}_V = (2, x + 1, x + x^2)$ und $\widetilde{\mathcal{B}}_W = (2)$

gegeben.

(i) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von $\mathcal{I}$ bezüglich der Basen:

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}_W,\mathcal{B}_V}(\mathcal{I}) \quad \text{und} \quad \mathbf{M}_{\widetilde{\mathcal{B}}_W,\widetilde{\mathcal{B}}_V}(\mathcal{I}).$$

(ii) Bestimmen Sie vom Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ (mit $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$) die Koordinaten bezüglich der Basen:

$$\mathbf{x} = \Phi^{-1}_{\mathcal{B}_V}(p) \quad \text{und} \quad \widetilde{\mathbf{x}} = \Phi^{-1}_{\widetilde{\mathcal{B}}_V}(p).$$

(iii) Bestimmen Sie die Anwendung der Matrix auf die jeweilige Koordinatendarstellung:

$$r = \mathbf{M}_{\mathcal{B}_W,\mathcal{B}_V}(\mathcal{I}) \cdot \mathbf{x} \quad \text{und} \quad \widetilde{r} = \mathbf{M}_{\widetilde{\mathcal{B}}_W,\widetilde{\mathcal{B}}_V}(\mathcal{I}) \cdot \widetilde{\mathbf{x}}.$$

(iv) Bestimmen Sie das Ergebnis $\mathcal{I}(p) \in \mathbb{R}$ durch Berechnung von

$$\Phi_{\mathcal{B}_W}(r) \quad \text{und} \quad \Phi_{\widetilde{\mathcal{B}}_W}(\widetilde{r}).$$

Hinweis: Den Körper $\mathbb{R}$ kann man als (sehr einfachen) Vektorraum über $\mathbb{R}$ auffassen. Dieser Vektorraum hat nur eine Dimension und die Standardbasis ist die Zahl $1 \in \mathbb{R}$. Man kann natürlich aber auch eine andere Zahl $b \in \mathbb{R}$ als Basis wählen. Dann hat ein Element dieses Vektorraums $v \in \mathbb{R}$ die Darstellung $v = \frac{v}{b} \cdot b$.

Aufgabe 2 (Diagonalisierung der Matrixdarstellung, 14 Punkte)
Betrachten Sie die Vektorräume

$$\begin{aligned} V &= \{\lambda_1 \cdot (3x^2 + x^3) + \lambda_2 \cdot (x^2 \ln(x)) + \lambda_3 \cdot (x^2 + x^3 \ln(x)) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\} \\ W &= \{\lambda_1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot \ln(x) + \lambda_4 \cdot x \ln(x) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

als Teilmenge der reellwertigen Funktionen auf dem Interval $[1, \infty]$, d.h. es gilt $V, W \subset \mathrm{Abb}([1, \infty], \mathbb{R})$. Als lineare Abbildung zwischen diesen beiden Räumen sei die zweite Ableitung

$$\Delta : V \to W, \quad g \mapsto g''$$

definiert. Die aufspannenden Vektoren beider Räume sind linear unabhängig, d.h. sie bilden sogar eine Basis des jeweiligen Raumes:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_V &:= (3x^2 + x^3, x^2 \ln(x), x^2 + x^3 \ln(x)), \\ \mathcal{B}_W &:= (1, x, \ln(x), x \ln(x)). \end{aligned}$$

(i) Berechnen Sie die Matrixdarstellungsmatrix

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V}(\Delta) \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$$

der linearen Abbildung Δ bzgl. der Basen $\mathcal{B}_V$ und $\mathcal{B}_W$.

(ii) Bestimmen Sie zwei Matrizen $\mathbf{E}, \mathbf{E}'$, so dass Sie eine Darstellung

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V}(\Delta) \cdot \mathbf{E}' = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: \mathbf{M}_{\widetilde{\mathcal{B}}_W, \widetilde{\mathcal{B}}_V}(\Delta)$$

mit einer Diagonalmatrix erhalten.

(iii) Bestimmen Sie Transformationsmatrizen

$$\mathbf{T}_{\mathcal{B}_V, \widetilde{\mathcal{B}}_V} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad \text{und} \quad \mathbf{T}_{\mathcal{B}_W, \widetilde{\mathcal{B}}_W} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

auf Basen $\widetilde{\mathcal{B}}_V$ und $\widetilde{\mathcal{B}}_W$ bzgl. derer die lineare Abbildung die Darstellung $\mathbf{M}_{\widetilde{\mathcal{B}}_W, \widetilde{\mathcal{B}}_V}(\Delta)$ aus (ii) besitzt.

(iv) Berechnen Sie die Vektoren der neuen Basen

$$\widetilde{\mathcal{B}}_V \quad \text{und} \quad \widetilde{\mathcal{B}}_W$$

durch Linearkombination der alten Basisvektoren $\mathcal{B}_V$ und $\mathcal{B}_W$ unter Verwendung von $\mathbf{T}_{\mathcal{B}_V,\widetilde{\mathcal{B}}_V}$ und $\mathbf{T}_{\mathcal{B}_W,\widetilde{\mathcal{B}}_W}$.

(v) Betrachten Sie das folgende Element von V:

$$g(x) := 6x^2 + 4x^3 - 2x^2\ln(x) - 6x^3\ln(x).$$

Stellen Sie $g \in V$ über den kanonischen Basisisomorphismus jeweils bzgl. $\mathcal{B}_V$ und bzgl. $\widetilde{\mathcal{B}}_V$ dar, d.h. berechnen Sie

$$\mathbf{x} = \Phi_{\mathcal{B}_V}^{-1}(g) \quad \text{und} \quad \widetilde{\mathbf{x}} = \Phi_{\widetilde{\mathcal{B}}_V}^{-1}(g).$$

(vi) Wenden Sie die lineare Abbildung an und notieren Sie das Ergebnis in Koordinaten bzgl. $\mathcal{B}_W$ und bzgl. $\widetilde{\mathcal{B}}_W$, d.h. berechnen Sie

$$\mathbf{r} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}_W,\mathcal{B}_V}(\Delta)\cdot\mathbf{x} \quad \text{und} \quad \widetilde{\mathbf{r}} = \mathbf{M}_{\widetilde{\mathcal{B}}_W,\widetilde{\mathcal{B}}_V}(\Delta)\cdot\widetilde{\mathbf{x}}.$$

(vii) Wie lauten die Elemente von W, die durch $\mathbf{r}$ bzw. $\widetilde{\mathbf{r}}$ dargestellt werden, d.h. berechnen Sie

$$\Phi_{\mathcal{B}_W}(\mathbf{r}) \quad \text{und} \quad \Phi_{\widetilde{\mathcal{B}}_W}(\widetilde{\mathbf{r}}).$$

(viii) Leiten Sie g zweimal ab, d.h. berechnen Sie das Ergebnis von $\Delta(g) \in W$ direkt? Wie unterscheidet sich dieses Ergebnis von denen in (vii)?

Aufgabe 3 (Determinante einer Matrixsumme, 1 Punkt)
Geben Sie zwei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an, so dass gilt

$$\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \neq \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B}).$$

Aufgabe 4 (Berechnung von Determinanten, 5 Punkte)
Bestimmen Sie mittels des Verfahrens von Gauß die Determinante der folgenden Matrizen:

(i) Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(ii) Für $b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(iii)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

(iv)

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(v)

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$