Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Mathematik für Studierende der Bioinformatik 2

(Übung zu B-MBI-2, Sommersemester 2017)

Dr. K. Xylouris

Aufgabenblatt 2 (Abgabe: Do., 11.5., 16:15h)

Aufgabe 1 (Lineare Abbildungen, 12 Punkte)
Zeigen Sie, ob es sich bei den folgenden Abbildungen um lineare Abbildungen handelt.

(i)

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 5 \cdot x + 3$$

(ii)

$$P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

(iii)

$$M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 \cdot x_2$$

(iv)

$$T : \mathbb{R}^{3\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 3}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix}$$

(v) Sei $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner gleich zwei mit komplexen Koeffizienten:

$$Q : \mathbb{C}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{C}[x]_{\leq 2}, \quad a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \mapsto a_2 + (a_0 + a_1) \cdot x$$

(vi) Für $b > 0$ sei $\text{Abb}([0, b], \mathbb{R})$ der Vektorraum der Funktionen, die vom Intervall $[0, b] \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ abbilden:

$$E : \text{Abb}([0, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(\frac{b}{2}).$$

Aufgabe 2 (Dualraum, 8 Punkte)
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Nun lässt sich die Menge aller linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{R}$ betrachten, d.h. die Menge

$$V^* := \{L : V \to \mathbb{R} \mid L \text{ ist eine lineare Abbildung}\}.$$

Diese Menge V^* wird als *Dualraum* von V bezeichnet und die Elemente der Menge V^* (d.h. die linearen Abbildungen) heißen *Linearformen* auf V.

(i) Sei $V = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ der Vektorraum der reellwertigen, stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das Integral

$$\mathcal{I} : V \to \mathbb{R}, \qquad f \mapsto \mathcal{I}(f) := \int_a^b f(x)\,dx$$

eine Linearform auf V ist.

(ii) Sei V ein beliebiger $\mathbb{R}$-Vektorraum und V^* der zugehörige Dualraum. Zeigen Sie, dass der Dualraum V^* mit den Operationen

$$\begin{aligned} + : \quad & V^* \times V^* \to V^*, \\ & (L, M) \mapsto (L + M) \text{ mit } (L+M)(f) := L(f) + M(f) \text{ für alle } f \in V, \\ \cdot : \quad & \mathbb{R} \times V^* \to V^*, \\ & (\lambda, L) \mapsto (\lambda L) \text{ mit } (\lambda L)(f) := \lambda \cdot L(f) \text{ für alle } f \in V, \end{aligned}$$

ein Vektorraum ist.

Aufgabe 3 (Isomorphismen, 4 Punkte)
Sei $\Phi : V \mapsto \widetilde{V}$ ein Isomorphismus zwischen zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumen $V, \widetilde{V}$ und sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, so dass man zusätzlich eine lineare Abbildung $\widetilde{f} : \widetilde{V} \to \widetilde{V}$ konstruieren kann gemäß

$$\widetilde{f} := \Phi \circ f \circ \Phi^{-1}, \quad \widetilde{\mathbf{v}} \mapsto \widetilde{f}(\widetilde{\mathbf{v}}) := \Phi(f(\Phi^{-1}(\widetilde{\mathbf{v}}))).$$

Zeigen Sie:

(i) Sind $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ linear unabhängig, so sind auch die Bilder unter dem Isomorphismus, $\Phi(\mathbf{v}_1), \ldots, \Phi(\mathbf{v}_k) \in \widetilde{V}$, linear unabhängig.

(ii) Gilt $\widetilde{f}(\widetilde{\mathbf{v}}) = \alpha \widetilde{\mathbf{v}}$ für einen Vektor $\widetilde{\mathbf{v}} \in \widetilde{V}$ und $\alpha \in \mathbb{K}$, so gilt auch $f(\mathbf{v}) = \alpha \mathbf{v}$ für einen Vektor $\mathbf{v} \in V$.

Aufgabe 4 (Koordinatentransformation, 6P)
Betrachten Sie zum $\mathbb{R}^2$ drei verschiedene Basen

$$\mathcal{E} = (\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}), \quad \mathcal{B} = (\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}), \quad \mathcal{C} = (\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}).$$

(Dabei sind die Vektoren bzgl. der kanonischen Basis $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ notiert).

(i) Bestimmen Sie die Transformationsmatrizen

  (a) $\mathbf{T}_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ und $\mathbf{T}_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$,

  (b) $\mathbf{T}_{\mathcal{C},\mathcal{E}}$ und $\mathbf{T}_{\mathcal{E},\mathcal{C}}$,

  (c) $\mathbf{T}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ und $\mathbf{T}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

(ii) Berechnen Sie die Koordinaten von

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \text{ in der Basis } \mathcal{B} \text{ und } \mathcal{C},$$

$$\text{und von} \quad \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ in der Basis } \mathcal{E} \text{ und } \mathcal{C}.$$

(iii) Berechnen Sie das Produkt $\mathbf{T}_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \cdot \mathbf{T}_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$. Was fällt Ihnen auf?