8 Lineare Abbildungen und Matrizen

8.1 Matrizen

Eine besondere Rolle sowohl in der linearen Algebra als auch der Analysis spielen *lineare Abbildungen*. Auf endlich erzeugten Vektorräumen hängen diese eng mit sogenannten *Matrizen* (rechteckige Zahlenschemata) zusammen. Um für den weiteren Verlauf dieses Kapitels eine Anschauung zu entwickeln soll deshalb zunächst der Begriff der Matrix sowie grundlegende Matrix-Vektor Operationen eingeführt werden.

Definition 8.1 (Matrix)
Eine $m \times n$ Matrix $\mathbf{A}$, $m, n \in \mathbb{N}$, mit Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq m$, und $1 \leq j \leq n$ ist ein rechteckiges Zahlenschema

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Der Vektorraum aller $m \times n$ Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{K}$ wird als $\mathbb{K}^{m \times n}$ bezeichnet.
Dabei sei zu $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{B} = (b_{ij})$ die Addition definiert als

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sowie Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ als

$$\lambda \mathbf{A} = \lambda(a_{ij}) = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Definiert man zu einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und einem Spaltenvektor $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$ das Produkt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot v_1 + a_{12} \cdot v_2 + \ldots + a_{1n} \cdot v_n \\ a_{21} \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 + \ldots + a_{2n} \cdot v_n \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot v_1 + a_{m2} \cdot v_2 + \ldots + a_{mn} \cdot v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix},$$

so erhält man eine Abbildung

$$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \qquad \mathbf{v} \mapsto \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}.$$

Durch Nachrechnen erkennt man, dass ein derart definiertes f folgende Eigenschaften besitzt:

$$f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}), \qquad f(\lambda \mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v}).$$

Beispiele 8.2
Zu $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $v \in \mathbb{R}^n$, betrachte man die folgenden Beispiele:

(i) $n, m = 1$, $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$: $\mathbf{Av} = 2\mathbf{v} = 2v_1$.

(ii) $n = 2, m = 1$, $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$: $\mathbf{Av} = v_1 + v_2$.

(iii) (Identität) $n = 2, m = 2$, $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $\mathbf{Av} = \begin{pmatrix} 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 \\ 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_1 \end{pmatrix} = \mathbf{v}$.

(iv) (Rotation um 90°) $n = 2, m = 2$, $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:
$$\mathbf{Av} = \begin{pmatrix} 0 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2 \\ 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$

Ausgehend von diesen Beobachtungen soll der allgemeinere Begriff der *linearen Abbildung* definiert werden.

8.2 Lineare Abbildungen

Definition 8.3 (Lineare Abbildung)
Seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt *lineare Abbildung*, wenn gilt:

(i) $f(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})$ für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

(ii) $f(\lambda \cdot \mathbf{v}) = \lambda \cdot f(\mathbf{v})$ für alle $\mathbf{v} \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$

oder zusammengefasst

$$f(\lambda \cdot \mathbf{v} + \mu \cdot \mathbf{w}) = \lambda \cdot f(\mathbf{v}) + \mu \cdot f(\mathbf{w}) \qquad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Statt linearer Abbildung sind auch die präziseren Begriffe $\mathbb{K}$-*lineare Abbildung* oder *Homomorphismus von* $\mathbb{K}$-*Vektorräumen* gebräuchlich.

Dabei nennt man eine lineare Abbildung $f : V \to W$

- *Isomorphismus*, falls f bijektiv ist,
- *Endomorphismus*, falls $V = W$,
- *Automorphismus*, falls f bijektiv ist und außerdem $V = W$ gilt.

Als direkte Folgerung aus der Definition der linearen Abbildungen lassen sich folgende Eigenschaften ableiten:

Bemerkung 8.4
Seien V, W Vektorräume, $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, so gilt:

a) $f(0) = 0$ und $f(v - w) = f(v) - f(w)$.

b) $f(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{v}_n) = \lambda_1 f(\mathbf{v}_1) + ... + \lambda_n f(\mathbf{v}_n)$.

c) Ist eine Familie $(\mathbf{v}_i)_{i \in I}$ in V linear abhängig, so ist auch $(f(\mathbf{v}_i))_{i \in I}$ linear abhängig.

d) Ist $V' \subset V$ ein Untervektorraum, so ist $f(V') \subset W$ Untervektorraum.

e) $\dim(f(V)) \leq \dim(V)$.

f) Ist f bijektiv (also ein Isomorphismus), so ist auch $f^{-1} : W \to V$ linear.

Beweis.

a) + b): Folgt durch einfaches Nachrechnen mit $f(0) = f(0 \cdot 0)$ und $f(v - w) = f(v + (-1)w)$.

c) "Lineare Abhängigkeit" $\Rightarrow \exists i_1, ..., i_n \in I$ und $\lambda_1, ...\lambda_n \in \mathbb{K}$:

$$\lambda_1 \mathbf{v}_{i_1} + ... + \lambda_n \mathbf{v}_{i_n} = 0,$$

wobei zumindest eines der $\lambda_1, ..., \lambda_n \neq 0$. Mit (b) folgt dann, dass auch

$$\lambda_1 f(\mathbf{v}_{i_1}) + ... + \lambda_n f(\mathbf{v}_{i_n}) = 0$$

gilt.

d) Untervektorraumeigenschaften des Raums $f(V')$ nachprüfen! Dazu betrachte man Vektoren $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in f(V')$ und nutze die Eigenschaften der linearen Abbildung f.

e) Mit (c) folgt: Ist $f(\mathbf{v_1}), ..., f(\mathbf{v_n}) \in f(V)$ linear unabhängig, so auch $\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_n} \in V$. Die Dimension von V ist damit mindestens so groß wie die von $f(V)$.

f) Es sei $v, v' \in V$, $w := f(v)$, $w' := f(v')$. Mit

$$f(\lambda v + \mu v') = \lambda w + \mu w'$$

und $v = f^{-1}(w)$ sowie $v' = f^{-1}(w')$ folgt nach Anwendung von f^{-1} schließlich

$$\lambda f^{-1}(w) + \mu f^{-1}(w') = f^{-1}(\lambda w + \mu w').$$

Häufig werden mehrere lineare Abbildungen hintereinander ausgeführt, also *verkettet*. Nützlich ist hierbei folgende Bemerkung:

Bemerkung 8.5
Seien $f : V \to W$ und $g : W \to U$ lineare Abbildungen auf Vektorräumen V, W und U, so ist die Verkettung

$$f \circ g : V \to U, \quad v \mapsto f(g(v)),$$

eine lineare Abbildung zwischen den Vektorräumen V und U.

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) &= f(g(\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w})) \\ &= f(\lambda g(\mathbf{v}) + \mu g(\mathbf{w})) \\ &= \lambda f(g(\mathbf{v})) + \mu f(g(\mathbf{w})) \\ &= \lambda (f \circ g)(\mathbf{v}) + \mu (f \circ g)(\mathbf{w})\end{aligned}$$

□

Im Umgang mit linearen Abbildungen sind die folgenden Begriffe besonders hilfreich:

Definition 8.6 (Bild und Kern)
Zu einer linearen Abbildung $f : V \to W$ nennt man

$\mathrm{Im}(f)$	$:= f(V)$	$= \{f(v) \mid v \in V\} \subset W$	das *Bild* von f,
$\mathrm{Kern}(f)$	$:= f^{-1}(0)$	$= \{v \in V \mid f(v) = 0\} \subset V$	den *Kern* von f.

Durch Nachprüfen der Untervektorraumeigenschaften sieht man, dass zu einer linearen Abbildung $f : V \to W$ zwischen Vektorräumen V und W sowohl $\mathrm{Im}(f) \subset W$ als auch $\mathrm{Kern}(f) \subset V$ jeweils Untervektorräume sind.

Definition 8.7 (Rang)
Ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen V, W, so bezeichnet

$$\mathrm{Rang}(f) := \dim \mathrm{Im}(f)$$

die Dimension des Bilds von f.

Zu Beginn des Kapitels wurde gezeigt, dass Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ lineare Abbildungen zwischen den Vektorräumen $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ beschreiben:

$$\mathbf{A} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad \mathbf{v} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{v}.$$

Der Rang einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ist entsprechend gegeben als

$$\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = \dim\{\mathbf{A}\mathbf{v} \mid v \in \mathbb{K}^n\}.$$

8.3 Lineare Gleichungssysteme

In vielen Anwendungen ist man an Lösungen von sogenannten *linearen Gleichungssystemen* interessiert. Hierbei sucht man n Unbekannte die m lineare Bedingungen erfüllen.

Definition 8.8 (Lineares Gleichungssystem)
Für $m, n \in \mathbb{N}$ bezeichnet man für die n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ und die Werte $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{K}$ die m Gleichungen

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\ldots+ & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\ldots+ & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

als *lineares Gleichungssystem*. Die Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{K}$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ heißen *Koeffizienten*. Das Gleichungssystem lässt sich auch kompakt schreiben als

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad \text{für } i = 1, \ldots, m.$$

Alternativ lässt sich ein lineares Gleichungssystem in Matrixschreibweise darstellen. Sei dazu $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^m$. Gesucht ist dann $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$, so dass

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\ldots+ & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\ldots+ & a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \mathbf{b}.$$

Bemerkung 8.9
Ob ein Gleichungssystem $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $A \in \mathbb{K}^{m\times n}, x \in \mathbb{K}^n, b \in \mathbb{K}^m$ lösbar ist hängt von der Beschaffenheit der Matrix $\mathbf{A}$ beziehungsweise der durch sie definierten linearen Abbildung ab. Betrachtet man die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \qquad \mathbf{x} \to \mathbf{A}\mathbf{x},$$

so gilt:

(i) $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbar $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}(f)$.

(ii) $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ besitzt eindeutige Lösung $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}(f)$ und $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$.

Beweis. (i) folgt direkt aus der Definition von $\mathrm{Im}(f)$.
(ii) "Eindeutige Lösung $\Rightarrow$ $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$ ": Sei $\mathbf{x}^* \in \mathbb{K}^n$ die eindeutige Lösung von $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, und angenommen es existiert $y \in \mathrm{Kern}(f), y \neq 0$. Wegen $\mathbf{A}\mathbf{y} = 0$ folt dann

$\mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ und damit $\mathbf{A}(\mathbf{x}^* + \mathbf{y}) = \mathbf{b}$. Damit wäre aber auch $(\mathbf{x}^* + \mathbf{y})$ eine Lösung. Widerspruch zur Annahme!
"$\mathbf{b} \in \mathrm{Im}(f)$ und $\mathrm{Kern}(f) = \{0\} \Rightarrow$ Eindeutigkeit": Wegen $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}(f)$ existiert $\mathbf{x}^* \in \mathbb{K}^n$: $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$. Angenommen es existierte noch eine weitere Lösung $\mathbf{y} \in \mathbb{K}^n, y \neq x^*$: $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Dann ließe sich $\mathbf{y}$ schreiben als $\mathbf{y} = \mathbf{x}^* + \mathbf{z}$ mit $z \in \mathbb{K}^n, z \neq 0$. Damit würde dann aber gelten:

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ \Leftrightarrow \quad & \mathbf{A}(\mathbf{x}^* + \mathbf{z}) = b \\ \Leftrightarrow \quad & \mathbf{A}\mathbf{x}^* + \mathbf{A}\mathbf{z} = b \\ \Leftrightarrow \quad & \mathbf{A}\mathbf{z} = 0 \end{aligned}$$

und damit $z \in \mathrm{Kern}(f)$. Widerspruch zur Annahme! $\square$

Um eine Anschauung zu entwickeln soll der Einsatz von linearen Gleichungssystemen im Folgenden bei der Berechnung von Schnittpunkten zwischen Ebenen im $\mathbb{R}^3$ gezeigt werden.

Eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ lässt sich über eine lineare Gleichung beschreiben:

$$E := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b\},$$

mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3$ und rechter Seite $b \in \mathbb{R}$.

Um den Schnittpunkt dreier Ebenen E_1, E_2, E_3 im $\mathbb{R}^3$ zu berechnen, muss dementsprechend $x \in \mathbb{R}^3$ gefunden werden so dass gilt:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \quad (E_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \quad (E_2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \quad (E_3). \end{aligned}$$

oder kurz

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

mit $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $\mathbf{x} = (x_i) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{b} = (b_i) \in \mathbb{R}^3$.

Seien nun konkret

$$\begin{aligned} E_1 &:= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 = 4\}, \\ E_2 &:= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6\}, \\ E_3 &:= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2\}. \end{aligned}$$

Fasst man die Koeffizienten in der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und die rechte Seite im Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ zusammen, so lässt sich das Gleichungssystem schreiben als

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

8.4 Gauss-Elimination (Ausblick)

Existiert eine Lösung eines linearen Gleichungssystems, so lässt sich diese mit dem Eliminationsverfahren von Gauss finden. Dabei formt man Matrix und rechte Seite geeignet um, so dass sich bei gleichbleibender Lösung eine Zeilenstufenform der Matrix ergibt, aus der man die Lösung durch einfaches Einsetzen ablesen kann.

Dieses Verfahren soll hier beispielhaft zur Berechnung des Schnittpunktes der drei Ebenen aus obigem Beispiel eingesetzt werden. Für eine tiefer gehende Diskussion des Verfahrens sei auf [Fischer] verwiesen.

Ausgehend von den drei Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcrcll} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 & (I) \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 6 & (II) \\ -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 & (III). \end{array}$$

erhält man durch wiederholte Umformung zunächst

$$\begin{array}{rcrcrcrll} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 & (I) & \\ & & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 6 & (II & := 2 \cdot II - I) \\ & & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 10 & (III & := 2 \cdot III + I) \end{array}$$

und schließlich die sogenannte Zeilenstufenform

$$\begin{array}{rcrcrcrll} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 & (I) & \\ & & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 6 & (II) & \\ & & & & 2x_3 & = & 4 & (III & := III - II) \end{array}$$

Durch einfaches Umformen findet man aus (III) nun zunächst $x_3 = 2$.
Einsetzen von x_3 in (II) und Umformen ergibt $x_2 = 0$.
Einsetzen von x_2 und x_3 in (I) und Umformen ergibt schließlich $x_1 = 2$.

Die zugehörige Matrixdarstellung des so erhaltenen linearen Gleichungssystems lautet

$$\mathbf{A}' \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathbf{b}'.$$

Die Gauss-Elimination lässt sich für beliebige m, n durchführen. Ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, so liefert das Verfahren stets die gesuchte Lösung.