

## Mathematik für Studierende der Bioinformatik 1

(Übung zu B-MBI-1, Wintersemester 2015/2016)

Dr. S. Reiter, Dr. A. Vogel, Prof. Dr. G. Wittum

### Aufgabenblatt 11 (Abgabe: Mo., 25.1.2016, 10:15h)

#### Aufgabe 1 (Partielle Integration, 6P)

Nutzen Sie die partielle Integration

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx + f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b,$$

um den Wert der folgenden Integrale zu bestimmen:

(i)

$$\int_a^b x \cdot e^x dx$$

(ii)

$$\int_1^2 x \cdot \ln(x) dx$$

Geben Sie jeweils an, welche Funktionen  $f$  und  $g$  Sie verwendet haben.

#### Aufgabe 2 (Substitutionsregel, 6P)

Nutzen Sie die Substitutionsregel

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx,$$

um den Wert der folgenden Integrale zu bestimmen:

(i)

$$\int_a^b t e^{t^2} dt$$

(ii)

$$\int_a^b \frac{2t}{t^2 + 2} dt$$

Geben Sie jeweils an, welche Funktionen  $f$  und  $\varphi$  Sie verwendet haben.

**Aufgabe 3** (Summierte Trapezregel, 3P)

Zur Approximation eines Integrals kann die *summierte Trapezregel* mit einer Unterteilung des Intervalls  $[a, b]$  in  $n$  äquidistante Abschnitte mit Feinheit  $h := \frac{b-a}{n}$  verwendet werden:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \left( \frac{1}{2}f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) + \frac{1}{2}f(b) \right) h.$$

Der dabei gemachte Fehler (sog. Restglied  $R$ ) lässt sich abschätzen zu:

$$|R| \leq \frac{1}{12}(b-a)h^2 \sup_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

(i) Sei  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben als  $f(x) := e^x$ . Es soll das Integral

$$\int_0^2 f(x) dx$$

approximiert werden.

Bestimmen Sie die folgenden Werte bis auf 3 Nachkommastellen:

- (a) Wert des exakten Integrals  $\int_0^2 f(x) dx$ ,
- (b) Wert der summierten Trapezregel für  $h = 2$  ( $n = 1$ ),
- (c) Wert der summierten Trapezregel für  $h = 1$  ( $n = 2$ ),
- (d) Wert der summierten Trapezregel für  $h = 1/2$  ( $n = 4$ ),
- (e) Abschätzung des Restglieds für  $h = 1/2$  ( $n = 4$ ).

(ii) Sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben als  $f(x) := x + 2$  und die Trapezregel wird zur Berechnung des Integrals

$$\int_0^1 f(x) dx$$

verwendet. Schätzen Sie den Fehler des Restglieds der summierten Trapezregel für  $h = 1$  ab.

**Aufgabe 4** (Numerische Quadratur, 5P)

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar, die ersten Ableitungen beschränkt mit  $K_1 := \sup_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$  und die zweiten Ableitungen beschränkt mit  $K_2 := \sup_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$ . Sei zudem die Unterteilung des Intervalls  $[a, b]$  in  $n$  äquidistante Abschnitte mit Feinheit  $h := \frac{b-a}{n}$  gewählt.

Zeigen Sie:

1. Für die *summierte (Linksseitige-)Borregel* findet man

$$\int_a^b f(x) dx = h \left( \sum_{k=0}^{n-1} f(a + kh) \right) + R$$

mit einem Restterm der Größe

$$|R| \leq \frac{K_1}{2}(b-a)h.$$

2. Für die *summierte Mittelpunktsregel* findet man

$$\int_a^b f(x) dx = h \left( \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right)h\right) \right) + R$$

mit einem Restterm der Größe

$$|R| \leq \frac{K_2}{24}(b-a)h^2.$$