Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Mathematik für Studierende der Bioinformatik 1

(Übung zu B-MBI-1, Wintersemester 2016/2017)

Dr. Logashenko, Dr. Xylouris

Aufgabenblatt 3 (Abgabe: Mo., 07.11., 10:00h)

Aufgabe 1 (Gruppe, 4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Menge $A := \{2z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ bezüglich Addition eine Gruppe $(A, +)$ bildet.

Aufgabe 2 (Äquivalenzklasse, 6 Punkte)
Zeigen Sie, dass es sich für Paare $(a, b), (a', b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+$ bei der Relation

$$(a, b) \sim (a', b') :\Leftrightarrow a \cdot b' = a' \cdot b$$

um eine Äquivalenzrelation handelt, indem Sie die Reflexivität, Symmetrie und Transitivität zeigen.

Aufgabe 3 (Körper $\mathbb{F}_2$, 6 Punkte)
Betrachten Sie die Menge $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$, die nur aus zwei Elementen besteht. Auf dieser Menge seien Addition und Multiplikation gegeben durch:

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1, \quad 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 0,$$

und

$$0 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 1 = 0, \quad 1 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

Zeigen Sie, dass es sich bei $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ um einen Körper handelt. Wie lautet das neutrale Element bzgl. der Addition und der Multiplikation?

Bemerkung: Bei dem Körper $\mathbb{F}_2$ handelt es sich um den kleinst möglichen Körper. Dieser ist z.B. dadurch motiviert, dass man 0 als Äquivalenzklasse der geraden und 1 als Äquivalenzklasse der ungeraden Zahlen auffasst.

Aufgabe 4 (Betrag, 4 Punkte)
Zeigen Sie, dass für den Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$ gilt:

(i) $|x + y| \leq |x| + |y|$

(ii) $||x| - |y|| \leq |x + y|$

Aufgabe 5 ($\sqrt{15} \notin \mathbb{Q}$, 4 Zusatzpunkte + 4 Punkte + 4 Zusatzpunkte)
Zeige, dass die Wurzel von 15 nicht in $\mathbb{Q}$ liegt. Zeige dazu die ersten zwei Punkte.

(i) Beweise durch Kontraposition: Wenn das Quadrat n^2 einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ durch 15 teilbar ist, so ist auch die Zahl n durch 15 teilbar. Lege dabei die Primfaktorenzerlegung der Zahl $n = \Pi_{i=0}^{N} p_i^{k_i}$ zugrunde mit p_i Primzahlen und $k_i \in \mathbb{N}$ für $i = 0, ..., N$.

(ii) Zeige unter Verwendung von (i) und der Technik des Widerspruchsbeweises, dass die Gleichung $x^2 = 15$ nicht in $\mathbb{Q}$ lösbar ist. Lege dabei eine beliebige rationale Zahl zugrunde ($x = \frac{p}{q}$) mit teilerfremden p und q und führe unter Verwendung von (i) die Teilerfremdheit von p und q zum Widerspruch!

(iii) Verallgemeinere diese Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$, die keine Quadratzahlen sind!