

# Multilevel Monte Carlo Methoden und deren Anwendung

Diplomarbeit

eingereicht bei

Prof. Dr. Peter E. Kloeden  
Fachbereich Informatik und Mathematik  
Institut für Computerorientierte Mathematik  
Johann Wolfgang Goethe Universität  
Frankfurt am Main

von:

cand. math. Stefan Walter Heinz

Hollergewann 6  
65817 Eppstein  
Tel.: +49 (0)6198 7874  
Matrikelnummer: 2994392  
Studienrichtung: Mathematik

Eppstein, 14. Dezember 2009

# Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	III
Danksagung	IV
Ehrenwörtliche Erklärung	IV
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Stochastische Numerik</b>	<b>3</b>
2.1 Stochastische Differentialgleichungen . . . . .	3
2.2 Monte Carlo Methode . . . . .	5
<b>3 Multilevel Monte Carlo Methode</b>	<b>8</b>
3.1 Vorbereitungen . . . . .	8
3.2 Komplexitätstheorem . . . . .	12
3.3 Erweiterungen . . . . .	20
3.3.1 Optimales M . . . . .	20
3.3.2 Fehlerschätzung und Richardson Extrapolation . . . . .	22
3.3.3 Anzahl der Simulationen . . . . .	26
<b>4 Implementierung</b>	<b>27</b>
4.1 Algorithmus . . . . .	27
4.2 Ergebnisse . . . . .	29
4.2.1 Europäische Option . . . . .	29
4.2.2 Asiatische Option . . . . .	31
<b>5 Starke Konvergenzordnungen</b>	<b>32</b>
5.1 Indikatorfunktionen . . . . .	32

5.1.1	Voraussetzungen . . . . .	32
5.1.2	Sätze . . . . .	35
5.2	Stochastische Koeffizienten . . . . .	44
<b>6</b>	<b>MLMC für Greeks</b>	<b>50</b>
6.1	Greeks . . . . .	50
6.2	Pfadweises Schätzen der Ableitung . . . . .	51
6.3	Beispiele . . . . .	52
6.3.1	Black-Scholes Delta . . . . .	52
6.3.2	Pfadabhängiges Delta . . . . .	53
6.3.3	Digitale Option und Gamma . . . . .	53
6.4	Bedingungen für Erwartungstreue . . . . .	54
6.5	Approximation des Deltas . . . . .	57
6.6	Starke Ordnung . . . . .	59
<b>7</b>	<b>Anwendungen des MLMC Algorithmus</b>	<b>63</b>
7.1	Digitale Option . . . . .	63
7.2	Delta einer europäischen Option . . . . .	67
7.3	Ergebnisse . . . . .	69
7.3.1	Digitale Option . . . . .	69
7.3.2	Delta der Europäischen Option . . . . .	70
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>73</b>
<b>A</b>	<b>Programmierung mit VBA in Excel</b>	<b>74</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>89</b>

# Abbildungsverzeichnis

3.1	Optimales M . . . . .	21
4.1	Ergebnisse Europäische Option . . . . .	30
4.2	Ergebnisse Asiatische Option . . . . .	31
7.1	Ergebnisse Digitale Option . . . . .	70
7.2	Ergebnisse Delta mit einem Pfad . . . . .	71
7.3	Ergebnisse Delta mit zwei Pfaden . . . . .	72
A.1	Input und Output in Excel . . . . .	74

## **Danksagung**

Sehr bedanken möchte ich mich an dieser Stelle bei Dr. Andreas Neuenkirch, der mich beispielhaft betreute und mir auf der Suche nach Lösungswegen immer Rede und Antwort stand. Auch möchte ich mich im Besonderen bei meinen Eltern bedanken, die mich nicht nur finanziell, sondern auch moralisch sehr unterstützt und ausreichend Geduld für mich aufgebracht haben. Weiterhin gilt mein Dank Patrick Grüning, der bezüglich dieses Themas ein ausgezeichneter Diskussionspartner war und ebenso wie Jörg Nies beim Korrekturlesen eine große Hilfe darstellte.

## **Ehrenwörtliche Erklärung**

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Benutzung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe. Wörtlich übernommene Sätze und Satzteile sind als Zitate belegt, andere Anlehnungen hinsichtlich Aussage und Umfang unter den Quellenangaben kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen und ist nicht veröffentlicht.

Eppstein, 14. Dezember 2009

# Kapitel 1

## Einleitung

Zentrales Thema dieser Arbeit ist die Multilevel Monte Carlo Methode (MLMC Methode). Ziel dieser Methode ist es den Erwartungswert einer stochastischen Differentialgleichung (SDGL) zu bestimmen, indem Monte Carlo Pfadsimulationen benutzt werden. Der wesentliche Unterschied zur Monte Carlo Methode (MC Methode) ist die Verwendung von Multi-Grid Methoden, mit deren Hilfe der Rechenaufwand bei gleicher Genauigkeit deutlich reduziert werden kann. Die Genauigkeit wird durch den RMSE (Rooted Mean Square Error) des Schätzers beschrieben und soll durch ein  $\epsilon$  beschränkt sein. Am Beispiel von Optionen wird später klar werden, dass falls die Option einen Lipschitz Payoff besitzt und die Pfadsimulationen mittels des Euler-Diskretisierungsverfahrens bestimmt werden, der Rechenaufwand von  $O(\epsilon^{-3})$  für die MC Methode auf  $O(\epsilon^{-2}(\log \epsilon)^2)$  bei der MLMC Methode reduziert wird.

Um die späteren Rechnungen zu erklären, werden deshalb in Kapitel 2 die wichtigsten Informationen zu stochastischen Differentialgleichungen und der MC Methode gegeben. Kapitel 3 bildet den Kern der Arbeit. Hier wird zuerst die Wirkungsweise der MLMC Methode beschrieben und daraufhin im Komplexitätstheorem ein genauer Rahmen für die Anwendung der Methodik erstellt. In Abschnitt 3.3 wird die Wahl des Parameters  $M$  diskutiert sowie die Möglichkeit den Rechenaufwand mit Hilfe der Richardson Extrapolation weiter zu senken. Das darauf folgende Kapitel beschreibt, auf welche Weise der MLMC Algorithmus programmiert wird. Außerdem werden anhand einiger Beispiele von Optionen verschiedene Grafiken zu den Berechnungen des Algorithmus präsentiert, die die theoretischen Ergebnisse bestätigen.

In der zweiten Hälfte der Diplomarbeit wird die Anwendung der MLMC Methode auf die Sensitivitäten der Optionen (Greeks) beschrieben, wobei das Schätzen des Deltas

mittels der pfadweisen Ableitung im Vordergrund steht. Um das Komplexitätstheorem auf das neue Problem anwenden zu können, wird in Kapitel 5 die starke Konvergenzordnung des Euler-Verfahrens für zwei Fälle bestimmt. Zum Einen für den Fall eines nichtstetigen Payoffs, der sich jedoch mit einer Indikatorfunktion beschreiben lässt und zum Anderen für eine stochastische Differenzialgleichung mit stochastischen Koeffizienten. Kapitel 6 gibt daraufhin eine Einleitung zu Greeks und der Methode des pfadweisen Schätzens der Ableitung sowie Beispiele dazu. Nachdem die Bedingungen angegeben wurden, die für die Anwendung der Methodik erfüllt sein müssen, wird genauer erklärt, wie im Falle des Euler-Verfahrens das Delta bestimmt und die starke Konvergenzordnung dafür berechnet wird. In Kapitel 7 wird nun das Komplexitätstheorem auf den Fall der Digitalen Option angewandt. Mit diesem Ergebnis und den vorherigen Rechnungen lässt sich schließlich beschreiben, wie sich mit Hilfe der MLMC Methode das Delta einer europäischen Option bestimmen lässt. Die praktischen Ergebnisse dazu befinden sich im darauffolgenden Abschnitt. Das letzte Kapitel fasst noch einmal die Ergebnisse der Diplomarbeit zusammen.

Im Anhang befindet sich das VBA-Programm mit dessen Hilfe die numerischen Ergebnisse in Excel berechnet wurden.

# Kapitel 2

## Stochastische Numerik

Es werden nun die wichtigsten Grundlagen präsentiert, die für die Multilevel Monte Carlo Methode später von Bedeutung sind.

### 2.1 Stochastische Differentialgleichungen

Stochastische Differentialgleichungen (SDGLen) sind Differentialgleichungen, die einen stochastischen Störterm (Rauschen) besitzen. Sie werden in der Mathematik dazu verwendet, stochastische Prozesse zu simulieren. In dieser Arbeit werden dies ausschließlich Aktienkurse sein.

Um den Pfad einer Aktie zu simulieren, wird die folgende eindimensionale SDGL benutzt:

$$dS_t = a(S_t, t)dt + b(S_t, t)dW_t, \quad 0 < t < T \quad (2.1)$$

mit Drift  $a : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , Volatilität  $b : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , Brownscher Bewegung  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  (vgl. [13], Kapitel 3.1) und Startwert  $S_0 \in \mathbb{R}$ .

Diese SDGL lässt sich auch als Integralgleichung interpretieren

$$S_t = S_{t_0} + \int_{t_0}^t a(S_u, u)du + \int_{t_0}^t b(S_u, u)dW_u,$$

wobei im Hintergrund stets ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, F, \mathbb{P})$  steht und man  $S_t(\omega) = S_t$  setzt, da  $\omega \in \Omega$  stets als fix erachtet wird.

Mit Hilfe des Euler-Diskretisierungsverfahren wird die Lösung dieser SDGL auf folgende



Weise bei Schrittweite  $h_n = t_n - t_{n-1}$  für  $\Delta W_n = W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$  iterativ approximiert

$$\widehat{S}_{n+1} = \widehat{S}_n + a(\widehat{S}_n, t_n)h_n + b(\widehat{S}_n, t_n)\Delta W_n \quad (2.2)$$

bezüglich einer Unterteilung  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots < t_N = T$  des Intervalls  $[0, T]$ , wobei  $N \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Diskretisierungsschritte bestimmt und die  $N(0, h)$ -verteilte Zufallsvariable  $\Delta W_n$  durch  $\sqrt{h}Z$ ,  $Z \sim N(0, 1)$  simuliert wird.

Um den Fehler einer solchen Approximation zu bestimmen, werden für  $\delta = \max_n h_n$  zwei Arten von Fehlern definiert.

**Definition 2.1** *Ein numerisches Verfahren konvergiert schwach mit Ordnung  $\beta > 0$ , falls für Schrittweite  $\delta$ , numerische Approximation  $S_n^{(\delta)}$  und alle Polynome  $P$*

$$\max_n |E(P(S_n^{(\delta)})) - E(P(S_{t_n}))| \leq K_{P,T}\delta^\beta$$

*gilt, wobei die Konstante  $K_{P,T}$  unabhängig von  $\delta$  ist.*

**Definition 2.2** *Ein numerisches Verfahren konvergiert stark mit Ordnung  $\alpha > 0$ , falls für Schrittweite  $\delta$ , numerische Approximation  $S_n^{(\delta)}$  und alle ganzzahligen  $p \geq 1$*

$$\max_n E\left(|S_n^{(\delta)} - S_{t_n}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq K_T\delta^\alpha$$

*gilt, wobei die Konstante  $K_T$  unabhängig von  $\delta$  ist.*

Ist das Polynom  $P$  die Identität, sieht man leicht ein, dass aus starker Konvergenz schwache Konvergenz folgt (vgl. [13], S. 38). Im Fall des stochastischen Euler-Verfahrens müssen noch Bedingungen an Drift und Volatilität gestellt werden, um die Konvergenzordnungen bestimmen zu können.

**Definition 2.3** *Genügen  $a(S, t)$  und  $b(S, t)$  den folgenden Bedingungen, so ist die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der SDGL (2.1) gesichert und das Euler-Verfahren konvergiert stark mit Ordnung  $\frac{1}{2}$  (mit Bedingungen 1.-3.) und schwach mit Ordnung 1 (mit Bedingungen 1.-4.) (vgl. [14], Theorem 10.2.2 und Theorem 14.1.5):*

1.  $|a(x, t) + a(y, t)| + |b(x, t) + b(y, t)| \leq K_1 |x - y|$  (Lipschitz-Stetigkeit),

2.  $|a(x, t)| + |b(x, t)| \leq K_2(1 + |x|)$  (*lineare Wachstumsbedingung*),
3.  $|a(x, s) - a(x, t)| + |b(x, s) - b(x, t)| \leq K_3(1 + |x|) |s - t|^{1/2}$ ,
4.  $a, b \in C^{2+\epsilon}$  für ein  $\epsilon > 0$  (*mehr als 2-fache stetige Differenzierbarkeit*).

Als Verdeutlichung soll das folgende Beispiel dienen.

**Beispiel 2.4** Für  $a(S, t) = \mu S$  und  $b(S, t) = \sigma S$  wird die SDGL

$$dS_t = \mu S dt + \sigma S dW_t, \quad 0 < t < T \quad (2.3)$$

*Geometrisch Brownsche Bewegung (GBM) genannt und das stochastische Euler-Verfahren lautet*

$$\widehat{S}_{n+1} = \widehat{S}_n + \mu S h_n + \sigma S \Delta W_n, \quad 0 < t < T. \quad (2.4)$$

*Im Falle einer GBM lässt sich sogar mit Hilfe der Ito-Formel zeigen, dass die Lösung dieser SDGL auf folgende Weise beschrieben werden kann (vgl. [10], S. 412)*

$$S_t = S_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right]. \quad (2.5)$$

## 2.2 Monte Carlo Methode

Im Allgemeinen basiert die Idee der Monte Carlo Methode auf dem starken Gesetz der großen Zahlen (vgl. [12], Satz 5.16). Sie wird oft in Fällen benutzt, in denen der Erwartungswert einer Zufallsvariablen nicht analytisch berechnet werden kann. Den Erwartungswert bestimmt man in diesem Fall, indem die Zufallsvariable mehrfach simuliert wird und das arithmetische Mittel der Simulationen als Schätzer für den Erwartungswert genommen wird.

In der Finanzmathematik werden so häufig Preise für exotische Optionen bestimmt, wobei die Funktionen  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  bzw.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die abgezinste Auszahlung der Option bestimmen, je nachdem, ob die Option vom vollständigen Pfad der Aktie oder nur vom Endwert der Aktie abhängt. Der Pfad der Aktie wird durch das in (2.2) beschriebene Euler-Verfahren bestimmt. Im Fall der pfadabhängigen Option ist

es das Ziel den Erwartungswert von  $f(S(t_0), S(t_1), \dots, S(t_N))$  zu berechnen, und falls die Aktie nur vom Endwert abhängt, den Erwartungswert von  $f(S(t_N))$ . Im Folgenden soll immer der eindimensionale Fall  $f(S(t_N))$  betrachtet werden. Genügt  $f(S)$  einer Lipschitzbedingung, das heißt es existiert eine Konstante  $c$ , so dass

$$|f(u) - f(v)| \leq c|u - v|, \quad \text{für alle } u, v \in \mathbb{R}, \quad (2.6)$$

erhält man für die Approximation  $f(S(t_N))$  die gleiche schwache und starke Konvergenzordnung bezüglich des Euler-Verfahrens, wie bei einer Approximation von  $S(t_N)$ . Für konstante Schrittweite  $h$  im Euler-Verfahren bildet sich der Schätzer  $\widehat{Y}$  für  $E[f(S(T))]$  aus dem arithmetischen Mittel der Auszahlungen  $f(\widehat{S}_{T/h}^{(i)})$  aus  $N$  unabhängigen Pfadsimulationen, also

$$\widehat{Y} = N^{-1} \sum_{i=1}^N f(\widehat{S}_{T/h}^{(i)}).$$

Als Maß für die Genauigkeit des Schätzers benutzt man den erwarteten Quadratmittelfehler (MSE für Mean Square Error) des Schätzers  $\widehat{Y}$ . Dieser ist hier asymptotisch von der Größe

$$MSE \approx c_1 N^{-1} + c_2 h^2, \quad (2.7)$$

wobei  $c_1$  und  $c_2$  positive Konstanten sind. Dies ergibt sich aus folgender Rechnung für den MSE von  $\widehat{Y}$

$$\begin{aligned} MSE &= E[|\widehat{Y} - Y|^2] \\ &= \left(E[\widehat{Y} - Y]\right)^2 + \text{Var}[\widehat{Y} - Y] \\ &= \left(E[\widehat{Y} - Y]\right)^2 + \text{Var}[\widehat{Y}], \end{aligned} \quad (2.8)$$

da  $Y$  hier keine Zufallsvariable ist und für eine Zufallsvariable  $X$  gilt  $\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2$ .

Weiter rechnet man aufgrund der Unabhängigkeit der  $i$  Simulationen,

$$\begin{aligned} \text{Var}[\widehat{Y}] &= \text{Var} \left[ N^{-1} \sum_{i=1}^N f(\widehat{S}_{T/h}^{(i)}) \right] \\ &= N^{-2} \sum_{i=1}^N \text{Var} \left[ f(\widehat{S}_{T/h}^{(i)}) \right] \\ &\leq c_1 N^{-1} \end{aligned} \quad (2.9)$$

für  $c_1 = \sup_{h \in (0,1]} \text{Var} \left[ f(\widehat{S}_{T/h}^{(i)}) \right]$ . Außerdem ist

$$E[Y - \widehat{Y}] \approx c_2 h,$$

aufgrund der schwachen Konvergenz des Euler-Verfahrens (vgl. Definition 2.3).

Ziel soll generell sein, einen MSE der Größenordnung  $O(\epsilon^2)$  zu erhalten, damit der erwartete Fehler  $E[|\widehat{Y} - Y|]$  von der Größenordnung  $O(\epsilon)$  ist. Dafür muss in Gleichung (2.7) gelten, dass  $N = O(\epsilon^{-2})$  und  $h = O(\epsilon)$  ist, da die Rechenkosten  $C$  proportional zu  $N/h$  sind (weil  $N$  mal simuliert wird und für einen simulierten Pfad  $1/h$  Iterationen notwendig sind). Damit folgt also  $C = O(\epsilon^{-3})$ .

# Kapitel 3

## Multilevel Monte Carlo Methode

Aufbauend auf dem Abschnitt über die Monte Carlo Methode soll in diesem Kapitel gezeigt werden, dass die Multilevel Monte Carlo Methode den Rechenaufwand  $C$  im Falle eines Lipschitzpayoffs unter Benutzung des Euler-Verfahrens bei einem erwarteten Fehler der Größe  $O(\epsilon)$  auf  $C = O(\epsilon^{-2}(\log \epsilon)^2)$  senken kann (dieses und das folgende Kapitel beziehen sich auf [6]). Der Name „Multilevel“ Monte Carlo kommt daher, dass die Pfade der Aktienkurse mit unterschiedlichen Schrittweiten simuliert werden. Im Komplexitätstheorem wird das Ergebnis dann verallgemeinert, indem der Rechenaufwand von der starken und schwachen Konvergenzordnung des numerischen Approximationsverfahren abhängig gemacht wird. Der letzte Abschnitt beschäftigt sich daraufhin mit möglichen Verbesserungen des Algorithmus.

### 3.1 Vorbereitungen

Für die MLMC Methode werden nun Pfadsimulationen mit unterschiedlichen Schrittweiten  $h_l = M^{-l}T$  und  $l = 0, 1, \dots, L$  betrachtet (vgl. Kapitel 3.3.1 zur Bestimmung des optimalen Wertes für  $M$ ). Für einen gegebenen Brownschen Pfad  $W(t)$  sei  $P = f(S(T))$  der Payoff einer Option zu diesem Pfad. Weiter seien  $\hat{S}_{l, M^l}$  und  $\hat{P}$  die Approximation von  $S(T)$  und  $P$ , die man durch das numerische Diskretisierungsverfahren (in dieser Arbeit immer das Euler-Verfahren) mit Schrittweite  $h_l$  erhält.

Der Trick der MLMC Methode besteht darin, den erwarteten Payoff der Approximation auf dem feinsten Diskretisierungslevel mittels einer Teleskopsumme wie folgt umzu-

schreiben

$$E[\widehat{P}_L] = E[\widehat{P}_0] + \sum_{l=1}^L E[\widehat{P}_l - \widehat{P}_{l-1}] \quad (3.1)$$

und danach die einzelnen Summanden auf der rechten Seite der Gleichung unabhängig voneinander zu schätzen.

Sei nun also  $\widehat{Y}_0$  ein Schätzer für  $E[\widehat{P}_0]$ , der mit  $N_0$  Pfadsimulationen auf folgende Weise geschätzt wird

$$\widehat{Y}_0 = N_0^{-1} \sum_{i=1}^{N_0} \widehat{P}_0^{(i)} \quad (3.2)$$

und, gegeben  $l > 0$ , ist  $\widehat{Y}_l$  ein Schätzer für  $E[\widehat{P}_l - \widehat{P}_{l-1}]$ . Dieser wird ebenfalls durch das arithmetische Mittel von  $N_l$  Pfadsimulationen geschätzt

$$\widehat{Y}_l = N_l^{-1} \sum_{i=1}^{N_l} \left( \widehat{P}_l^{(i)} - \widehat{P}_{l-1}^{(i)} \right). \quad (3.3)$$

Im folgenden werden die Ausdrücke  $\widehat{P}_0^{(i)}$ , bzw.  $\widehat{P}_l^{(i)} - \widehat{P}_{l-1}^{(i)}$  auch *Sample* genannt. Die  $\widehat{Y}_l$  heißen *einfache Schätzer* und  $\widehat{Y}$  ist der *gemeinsame Schätzer* für  $E[\widehat{P}_L]$ . Der gemeinsame Schätzer entspricht am Ende dem geschätzten Wert der Option und bestimmt sich durch

$$\widehat{Y} = \sum_{l=0}^L \widehat{Y}_l. \quad (3.4)$$

Ein weiterer wesentlicher Punkt, um den Rechenaufwand gering zu halten, ist, dass bei der Simulation eines Samples  $\widehat{P}_l^{(i)} - \widehat{P}_{l-1}^{(i)}$  zwar zwei unterschiedliche Approximationen berechnet werden, die beide aber von dem gleichen Brownschen Pfad stammen. Dies geschieht durch das Simulieren des feineren Pfades mit dem Level  $l$  und nachfolgendem Aufsummieren der  $M$  Brownschen Inkremente, um das Brownsche Inkrement zum Pfad mit Level  $l - 1$  zu erhalten. Unter Betrachtung von (2.2) bedeutet dies, dass zuerst ein Pfad für das Level  $l$  mit  $T/h_l$  Zufallsvariablen  $\Delta W_{n,l} = \sqrt{h_l} Z_n$ ,  $n = 1, \dots, T/h_l$  simuliert wird, wobei die  $Z_n$  unabhängig  $N(0,1)$ -verteilt sind. Für das Level  $l - 1$  fasst man sie danach zu  $T/(h_l M)$  Zufallsvariablen zusammen für die  $\Delta W_{m,l-1} = \sum_{j=1}^M \sqrt{h_l} Z_{mj}$ ,  $m = 1, \dots, T/h_{l-1}$  gilt, aber die  $Z_n$  vom Level  $l$  benutzt werden. Da Summen normalverteilter Zufallsvariablen wieder normalverteilt sind und  $E[\sum_{j=1}^M \sqrt{h_l} Z_{mj}] = 0$  sowie  $\text{Var}[\sum_{j=1}^M \sqrt{h_l} Z_{mj}] = h_l \sum_{j=1}^M \text{Var}[Z_{mj}] = h_l M = h_{l-1}$ , besitzen die  $\Delta W_{m,l-1}$  die richtige Verteilung und sind für alle  $m$  unabhängig.

Im folgenden Absatz soll für den Fall des Euler-Verfahrens gezeigt werden, dass die MLMC Methode den gewünschten geringeren Rechenaufwand besitzt.

Die Varianz eines Samples sei gegeben durch  $V_l$ . Damit berechnet sich die Varianz des einfachen Schätzers, aufgrund der Unabhängigkeit der Samples, als

$$\text{Var}[\widehat{Y}_l] = \text{Var} \left[ N_l^{-1} \sum_{i=1}^{N_l} \left( \widehat{P}_l^{(i)} - \widehat{P}_{l-1}^{(i)} \right) \right] = N_l^{-2} \sum_{i=1}^{N_l} \text{Var} \left[ \widehat{P}_l^{(i)} - \widehat{P}_{l-1}^{(i)} \right] = N_l^{-1} V_l. \quad (3.5)$$

Für die Varianz des gemeinsamen Schätzers  $\widehat{Y} = \sum_{l=0}^L \widehat{Y}_l$  gilt nun

$$\text{Var}[\widehat{Y}] = \sum_{l=0}^L N_l^{-1} V_l. \quad (3.6)$$

Weiter lässt sich der Rechenaufwand

$$C = N_0 + \sum_{l=1}^L N_l (M^l + M^{l-1}), \quad (3.7)$$

der benötigt wird, um  $\widehat{Y}$  zu berechnen, durch das Produkt aus der Anzahl der Samples  $N_l$  und der Anzahl der Diskretisierungsschritte des feinen und groben Pfades  $h_l^{-1} + h_{l-1}^{-1}/M = M^l + M^{l-1}$  für jedes Level bestimmen, da  $h_l = M^{-l}$ . Vernachlässigt man den kleineren Summanden  $M^{l-1}$ , so ist  $C$  ungefähr proportional zu

$$\sum_{l=0}^L N_l h_l^{-1}.$$

Um die Varianz zu minimieren, behandelt man nun die  $N_l$  als stetige Variablen und hält den Rechenaufwand fest. Mit der Lagrange Methode zur Lösung eines Minimierungsproblems mit Nebenbedingung (vgl. [15], S.124) erhält man für  $f(N) = \sum_{l=0}^L N_l^{-1} V_l$  mit  $N = (N_1, \dots, N_L)$  und  $g(N) = \sum_{l=0}^L N_l h_l^{-1} - K = 0$ , wobei  $K$  eine beliebige Konstante ist, folgende Lösung

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \frac{df(N)}{dN} + \lambda \frac{dg(N)}{dN} \\ &= (-V_0 N_0^{-2}, \dots, -V_L N_L^{-2}) + \lambda (h_0^{-1}, \dots, h_L^{-1}) \\ \Rightarrow N_l &= \sqrt{\lambda V_l h_l}, \quad \forall \lambda, V. \end{aligned} \quad (3.8)$$

$N_l$  muss also proportional zu  $\sqrt{V_l h_l}$  gewählt werden, da  $\lambda$  konstant ist.

Die bisherigen Rechnungen galten für alle Werte von  $L$ . Sei nun  $L \gg 1$  und man betrachte das Verhalten von  $V_l$  für  $l \rightarrow \infty$ . Im Falle des Euler-Diskretisierungsverfahrens und den gegebenen Bedingungen an  $a(S, t)$  und  $b(S, t)$  konvergiert die Approximation schwach mit Ordnung 1 und stark mit Ordnung 1/2. Für  $l \rightarrow \infty$  gilt also

$$E[\widehat{P}_l - P] = O(h_l), \quad (3.9)$$

und wegen  $E\left[\left|\widehat{S}_{l, M^l} - S(T)\right|\right] = O(h_l^{1/2})$  sowie Definition 2.2 für  $p = 2$

$$E\left[\left|\widehat{S}_{l, M^l} - S(T)\right|^2\right] = O(h_l). \quad (3.10)$$

Es folgt nun mit der Lipschitzeigenschaft (2.6), dass

$$\text{Var}[\widehat{P}_l - P] = E[(\widehat{P}_l - P)^2] - \left(E[\widehat{P}_l - P]\right)^2 \leq E[(\widehat{P}_l - P)^2] \stackrel{(2.6)}{\leq} c^2 E[|\widehat{S}_{l, M^l} - S(T)|^2].$$

Zusammen mit (3.10) ist also  $\text{Var}[\widehat{P}_l - P] = O(h_l)$ .

Weiter gilt mit der Eigenschaft  $\text{Cov}[X, Y] = \rho\sqrt{\text{Var}[X]\text{Var}[Y]} \leq \sqrt{\text{Var}[X]\text{Var}[Y]}$  für zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sowie dem Korrelationsfaktor  $\rho \in [-1, 1]$ , dass

$$\begin{aligned} \text{Var}[\widehat{P}_l - \widehat{P}_{l-1}] &= \text{Var}[(\widehat{P}_l - P) - (\widehat{P}_{l-1} - P)] \\ &= \text{Var}[\widehat{P}_l - P] - 2\text{Cov}[\widehat{P}_l - P, \widehat{P}_{l-1} - P] + \text{Var}[\widehat{P}_{l-1} - P] \\ &\leq \text{Var}[\widehat{P}_l - P] + 2\sqrt{\text{Var}[\widehat{P}_l - P]\text{Var}[\widehat{P}_{l-1} - P]} + \text{Var}[\widehat{P}_{l-1} - P] \\ &\stackrel{\text{Bin. Formel}}{=} \left( \left(\text{Var}[\widehat{P}_l - P]\right)^{1/2} + \left(\text{Var}[\widehat{P}_{l-1} - P]\right)^{1/2} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Hieraus folgt, dass die Varianz  $V_l$  eines Samples des einfachen Schätzers von der Größenordnung  $O(h_l)$  ist und somit ist wegen (3.8) das optimale  $N_l$  proportional zu  $h_l$ . Setzt man nun außerdem  $N_l = O(\epsilon^{-2}(L+1)h_l)$  so folgt für die Varianz des gemeinsamen Schätzers aus (3.6) für eine Konstante  $K$ , dass  $\text{Var}[\widehat{Y}] = \sum_{l=0}^L N_l^{-1} V_l = \sum_{l=0}^L (K\epsilon^{-2}(L+1)h_l)^{-1} h_l = O(\epsilon^2)$ .



Wählt man nun  $L$  so, dass

$$L = \frac{\log \epsilon^{-1}}{\log M} + O(1) \quad \text{für } \epsilon \rightarrow \infty,$$

dann ist

$$h_L = TM^{-L} = TM^{-\left(\frac{\log \epsilon^{-1}}{\log M} + K\right)} = Te^{-\log M \left(\frac{\log \epsilon^{-1}}{\log M} + K\right)} = T\epsilon e^{-\log MK} = O(\epsilon)$$

und wegen (3.9) folgt für den Bias  $E[\widehat{P}_L - P] = O(\epsilon)$ . Da die Varianz des Schätzers und der quadrierte Bias jeweils von der Ordnung  $O(\epsilon^2)$  sind, ist auch der MSE  $O(\epsilon^2)$ . Weiter folgt aus den bisherigen Rechnungen und der Definition von  $L$  der gewünschten Rechenaufwand der Größe  $C \approx K_1 \sum_{l=0}^L N_l h_l^{-1} = K_2 \sum_{l=0}^L \epsilon^{-2}(L+1)h_l h_l^{-1} = O(\epsilon^{-2}(L+1)^2) = O(\epsilon^{-2}(\log \epsilon)^2)$  für Konstanten  $K_1$  und  $K_2$ , die unabhängig von  $\epsilon$  sind.

## 3.2 Komplexitätstheorem

**Satz 3.1** *Sei  $P$  ein Funktional der Form  $P = f(S_T)$  und  $S_T$  die Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.1) für einen gegebenen Brownschen Pfad  $(W_t)_{t \geq 0}$  und sei  $\widehat{P}_l$  die dazugehörige Approximation mit einer Diskretisierung der Schrittweite  $h_l = M^{-l}T$ .*

*Falls auf  $N_l$  Monte Carlo Simulationen basierende, unabhängige Schätzer  $\widehat{Y}_l$  existieren, sowie positive Konstanten  $\alpha \geq \frac{1}{2}, \beta, c_1, c_2, c_3$ , damit*

- i)  $E[\widehat{P}_l - P] \leq c_1 h_l^\alpha$
- ii)  $E[\widehat{Y}_l] = \begin{cases} E[\widehat{P}_0], & l = 0 \\ E[\widehat{P}_l - \widehat{P}_{l-1}], & l > 0 \end{cases}$
- iii)  $\text{Var}[\widehat{Y}_l] \leq c_2 N_l^{-1} h_l^\beta$

iv)  $C_l$ , der Rechenaufwand von  $\widehat{Y}_l$ , begrenzt ist durch

$$C_l \leq c_3 N_l h_l^{-1},$$

dann existiert eine positive Konstante  $c_4$ , so dass es für jedes  $\epsilon < e^{-1}$  die Werte  $L$  und  $N_l$  gibt, für die der gemeinsame Schätzer

$$\hat{Y} = \sum_{l=0}^L \hat{Y}_l$$

einen Quadratmittelfehler mit Schranke

$$MSE \equiv E \left[ \left( \hat{Y} - E[P] \right)^2 \right] < \epsilon^2$$

und einem Rechenaufwand  $C$  mit der Schranke

$$C \leq \begin{cases} c_4 \epsilon^{-2}, & \beta > 1, \\ c_4 \epsilon^{-2} (\log \epsilon)^2, & \beta = 1, \\ c_4 \epsilon^{-2 - (1-\beta)/\alpha}, & 0 < \beta < 1 \end{cases}$$

besitzt.

**Beweis.** Indem  $L$  wie folgt gewählt wird

$$L = \left\lceil \frac{\log(\sqrt{2}c_1 T^\alpha \epsilon^{-1})}{\alpha \log M} \right\rceil, \quad (3.12)$$

wobei  $\lceil x \rceil$  der ganzen Zahl  $n$  entspricht, die der Ungleichung  $x \leq n < x + 1$  genügt (Aufrunden auf die nächstgrößere ganze Zahl). Aus den folgenden Umformungen

$$\begin{aligned} \frac{\log(\sqrt{2}c_1 T^\alpha \epsilon^{-1})}{\alpha \log M} &\leq L < \frac{\log(\sqrt{2}c_1 T^\alpha \epsilon^{-1})}{\alpha \log M} + 1 \\ \text{da } M \geq 2 &\Rightarrow M^{-\frac{\log(\sqrt{2}c_1 T^\alpha \epsilon^{-1})}{\alpha \log M}} \geq M^{-L} > M^{-\left(\frac{\log(\sqrt{2}c_1 T^\alpha \epsilon^{-1})}{\alpha \log M} + 1\right)} \\ \text{Logarithmusgesetze} &\Rightarrow e^{-\frac{\log M \log(\sqrt{2}c_1 T^\alpha \epsilon^{-1})}{\alpha \log M}} \geq M^{-L} > e^{-\log M \left(\frac{\log(\sqrt{2}c_1 T^\alpha \epsilon^{-1})}{\alpha \log M} + 1\right)} \\ \frac{\alpha > \frac{1}{2}}{\Downarrow} &\Rightarrow e^{-\log(\sqrt{2}c_1 T^\alpha \epsilon^{-1})} \geq M^{-L\alpha} > e^{-\left(\log(\sqrt{2}c_1 T^\alpha \epsilon^{-1}) + \log M^\alpha\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\sqrt{2}c_1T^\alpha\epsilon^{-1})^{-1} &\geq M^{-L\alpha} > (\sqrt{2}c_1T^\alpha\epsilon^{-1}M^\alpha)^{-1} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon &\geq c_1T^\alpha M^{-L\alpha} > \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon M^{-\alpha} \end{aligned}$$

erhält man mit  $h_L = M^{-L}T$  die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon M^{-\alpha} < c_1 h_L^\alpha \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon \quad (3.13)$$

und weiter gilt für  $L > 0$  (die Umformung im Fall  $L = 0$  geht analog und führt zum gleichen Ergebnis) mit den Eigenschaften *i*) und *ii*), dass

$$\begin{aligned} \left(E[\widehat{Y}] - E[P]\right)^2 &= \left(E\left[\sum_{l=0}^L \widehat{Y}_l\right] - E[P]\right)^2 \\ &\stackrel{\text{ii), Teleskopsumme}}{=} \left(E[\widehat{P}_L] - E[P]\right)^2 \\ &\stackrel{\text{i)}}{=} (c_1 h_L^\alpha)^2 \\ &\stackrel{(3.13)}{\leq} \frac{1}{2}\epsilon^2, \end{aligned}$$

so dass der Bias die gewünschte Schranke von  $\frac{1}{2}\epsilon^2$  besitzt.

Außerdem benötigt man nun die beiden Abschätzungen

$$\sum_{l=0}^L h_l^{-1} = \frac{1}{T} \sum_{l=0}^L M^l = \frac{1}{T} \sum_{l=0}^L M^{L-l} = \frac{M^L}{T} \sum_{l=0}^L M^{-l} < h_L^{-1} \frac{M}{M-1}, \quad (3.14)$$

wegen  $\sum_{l=0}^L M^{-l} < \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^L M^{-l} = \frac{M}{M-1}$  da  $M \geq 2$  und

$$\begin{aligned} h_L &\stackrel{(3.13)}{>} M^{-1} \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}c_1}\right)^{1/\alpha} \\ \Rightarrow h_L^{-1} &< M \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}c_1}\right)^{-1/\alpha}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Diese beiden Ungleichungen kombiniert mit der Feststellung, dass  $\epsilon^{-1/\alpha} \leq \epsilon^{-2}$  für  $\alpha \geq \frac{1}{2}$  und  $\epsilon < e^{-1}$  (es würde hier auch genügen  $\epsilon < 1$  zu wählen), führen zu folgendem

Ergebnis

$$\sum_{l=0}^L h_l^{-1} < \frac{M^2}{M-1} \left( \frac{\epsilon}{\sqrt{2}c_1} \right)^{-1/\alpha} < \frac{M^2}{M-1} \left( \sqrt{2}c_1 \right)^{1/\alpha} \epsilon^{-2}. \quad (3.16)$$

Es folgt nun eine Fallunterscheidung für die möglichen Werte von  $\beta$ .

a) Falls  $\beta = 1$  setzt man

$$N_l = \lceil 2\epsilon^{-2}(L+1)c_2h_l \rceil,$$

so dass

$$\text{Var}[\widehat{Y}] = \sum_{l=0}^L \text{Var}[\widehat{Y}_l] \stackrel{iii)}{\leq} \sum_{l=0}^L c_2 N_l^{-1} h_l \leq \sum_{l=0}^L c_2 h_l (2\epsilon^{-2}(L+1)c_2 h_l)^{-1} \leq \frac{1}{2}\epsilon^2$$

und somit genügt die Varianz des Schätzers der oberen Schranke  $\frac{1}{2}\epsilon^2$ , so dass mit der Schranke für den Bias  $MSE < \epsilon^2$  gilt.

Um den Rechenaufwand zu begrenzen, schätzt man zuerst  $L$  nach oben ab

$$L \stackrel{(3.12)}{\leq} \frac{\log \epsilon^{-1}}{\alpha \log M} + \frac{\log(\sqrt{2}c_1 T^\alpha)}{\alpha \log M} + 1,$$

so dass mit  $1 < \log \epsilon^{-1}$  für  $\epsilon < e^{-1}$  folgt

$$\begin{aligned} L+1 &\leq \log \epsilon^{-1} \left( \frac{1}{\alpha \log M} + \frac{\log(\sqrt{2}c_1 T^\alpha)}{\alpha \log M \log \epsilon^{-1}} + \frac{2}{\log \epsilon^{-1}} \right) \\ &\leq \log \epsilon^{-1} \left( \frac{1}{\alpha \log M} + \max \left( 0, \frac{\log(\sqrt{2}c_1 T^\alpha)}{\alpha \log M} \right) + 2 \right) \\ &= c_5 \log \epsilon^{-1}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

wobei

$$c_5 = \frac{1}{\alpha \log M} + \max \left( 0, \frac{\log(\sqrt{2}c_1 T^\alpha)}{\alpha \log M} \right) + 2.$$

Aus der oberen Grenze für  $N_l$

$$N_l \leq 2\epsilon^{-2}(L+1)c_2h_l + 1 \quad (3.18)$$

folgt für den Rechenaufwand von  $\widehat{Y}$

$$C \stackrel{iv)}{\leq} \sum_{l=0}^L c_3 N_l h_l^{-1} \stackrel{3.18}{\leq} \sum_{l=0}^L c_3 (2\epsilon^{-2}(L+1)c_2 h_l + 1) h_l^{-1} \leq c_3 \left( 2\epsilon^{-2}(L+1)^2 c_2 + \sum_{l=0}^L h_l^{-1} \right).$$

Weiter wird  $C$  durch Einsetzen der Schranke für  $L+1$  und der Ungleichung (3.16) sowie der Tatsache  $1 < \log \epsilon^{-1}$  für  $\epsilon < e^{-1}$ , wie folgt abgeschätzt

$$\begin{aligned} C &\leq c_3 \left( 2\epsilon^{-2}(c_5 \log \epsilon^{-1})^2 c_2 + \sum_{l=0}^L h_l^{-1} \right) \\ &\stackrel{(3.16)}{\leq} c_3 \left( 2\epsilon^{-2}(c_5 \log \epsilon^{-1})^2 c_2 + \frac{M^2}{M-1} (\sqrt{2}c_1)^{1/\alpha} \epsilon^{-2} \right) \\ &\leq \epsilon^{-2} (\log \epsilon)^2 \left( 2c_2 c_3 c_5^2 + c_3 \frac{M^2}{M-1} (\sqrt{2}c_1)^{1/\alpha} (\log \epsilon)^{-2} \right) \\ &= c_4 \epsilon^{-2} (\log \epsilon)^2 \end{aligned} \tag{3.19}$$

mit

$$c_4 = 2c_2 c_3 c_5^2 + c_3 \frac{M^2}{M-1} (\sqrt{2}c_1)^{1/\alpha},$$

so dass die Schranken für MSE und  $C$  gezeigt wurden.

Die weiteren Fälle werden nun in ähnlicher Weise bewiesen.

b) Für  $\beta > 1$  setzt man

$$N_l = \left\lceil 2\epsilon^{-2} c_2 T^{(\beta-1)/2} (1 - M^{-(\beta-1)/2})^{-1} h_l^{(\beta+1)/2} \right\rceil,$$

und für die Varianz des Gesamtschätzers folgt

$$\begin{aligned} \text{Var}[\widehat{Y}] &= \sum_{l=0}^L \text{Var}[\widehat{Y}_l] \stackrel{iii)}{\leq} \sum_{l=0}^L c_2 N_l^{-1} h_l^\beta \\ &\leq \sum_{l=0}^L c_2 h_l^\beta \left( 2\epsilon^{-2} c_2 T^{(\beta-1)/2} (1 - M^{-(\beta-1)/2})^{-1} h_l^{(\beta+1)/2} \right)^{-1} \\ &\leq \frac{1}{2} \epsilon^2 T^{-(\beta-1)/2} (1 - M^{-(\beta-1)/2}) \sum_{l=0}^L h_l^{(\beta-1)/2}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Um die Summe in diesem Term abzuschätzen, benutzt man zuerst die Definition  $h_l =$

$M^{-l}T$  und danach wie schon in a) den Grenzwert der geometrischen Reihe. Damit folgt

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^L h_l^{(\beta-1)/2} &= T^{(\beta-1)/2} \sum_{l=0}^L (M^{-(\beta-1)/2})^l \\ &< T^{(\beta-1)/2} \left( \sum_{l=0}^{\infty} (M^{-(\beta-1)/2})^l \right) \\ &\stackrel{M \geq 2, \beta > 1}{=} T^{(\beta-1)/2} (1 - M^{-(\beta-1)/2})^{-1} \end{aligned} \quad (3.21)$$

und durch Einsetzen von (3.21) in (3.20) errechnet sich wieder die obere Schranke von  $\frac{1}{2}\epsilon^2$  für die Varianz des Schätzers, woraufhin die gewünschte Schranke für den MSE folgt.

Indem nun die obere Schranke von  $N_l$

$$2\epsilon^{-2}c_2T^{(\beta-1)/2} (1 - M^{-(\beta-1)/2})^{-1} h_l^{(\beta+1)/2} + 1$$

in *iv*) eingesetzt wird und die Rechenkosten aufsummiert werden, erhält man

$$\begin{aligned} C &\leq \sum_{l=0}^L c_3 h_l^{-1} \left( 2\epsilon^{-2}c_2T^{(\beta-1)/2} (1 - M^{-(\beta-1)/2})^{-1} h_l^{(\beta+1)/2} + 1 \right) \\ &\leq c_3 \left( 2\epsilon^{-2}c_2T^{(\beta-1)/2} (1 - M^{-(\beta-1)/2})^{-1} \sum_{l=0}^L h_l^{(\beta-1)/2} + \sum_{l=0}^L h_l^{-1} \right). \end{aligned}$$

Mit den Ungleichungen (3.16) und (3.21) folgt

$$\begin{aligned} C &\leq c_3 \left( 2\epsilon^{-2}c_2 \left( T^{(\beta-1)/2} (1 - M^{-(\beta-1)/2})^{-1} \right)^2 + \frac{M^2}{M-1} \left( \sqrt{2}c_1 \right)^{1/\alpha} \epsilon^{-2} \right) \\ &\leq \epsilon^{-2}c_3 \left( 2c_2T^{\beta-1} (1 - M^{-(\beta-1)/2})^{-2} + \frac{M^2}{M-1} \left( \sqrt{2}c_1 \right)^{1/\alpha} \right) \\ &= c_4\epsilon^{-2}, \end{aligned}$$

wobei

$$c_4 = c_3 \left( 2c_2T^{\beta-1} (1 - M^{-(\beta-1)/2})^{-2} + \frac{M^2}{M-1} \left( \sqrt{2}c_1 \right)^{1/\alpha} \right).$$

c) Für  $\beta < 1$  setze

$$N_l = \left\lceil 2\epsilon^{-2} c_2 h_L^{-(1-\beta)/2} (1 - M^{-(1-\beta)/2})^{-1} h_l^{(\beta+1)/2} \right\rceil,$$

dann gilt für die Varianz des Schätzers  $\widehat{Y}$

$$\begin{aligned} \text{Var}[\widehat{Y}] &= \sum_{l=0}^L \text{Var}[\widehat{Y}_l] \stackrel{iii)}{\leq} \sum_{l=0}^L c_2 N_l^{-1} h_l^\beta \\ &\leq \sum_{l=0}^L c_2 h_l^\beta \left( 2\epsilon^{-2} c_2 h_L^{-(1-\beta)/2} (1 - M^{-(1-\beta)/2})^{-1} h_l^{(\beta+1)/2} \right)^{-1} \\ &\leq \frac{1}{2} \epsilon^2 h_L^{(1-\beta)/2} (1 - M^{-(1-\beta)/2}) \sum_{l=0}^L h_l^{-(1-\beta)/2}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^L h_l^{-(1-\beta)/2} &= h_L^{-(1-\beta)/2} \sum_{l=0}^L \left( h_l^{-(1-\beta)/2} h_L^{(1-\beta)/2} \right) \\ &\stackrel{h_l = M^{-lT}}{=} h_L^{-(1-\beta)/2} \sum_{l=0}^L (M^{-(1-\beta)/2})^l \\ &< h_L^{-(1-\beta)/2} \left( \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^L (M^{-(1-\beta)/2})^l \right) \\ &\stackrel{M \geq 2, \beta > 1}{=} h_L^{-(1-\beta)/2} (1 - M^{-(1-\beta)/2})^{-1} \end{aligned} \tag{3.22}$$

erhält man erneut, dass  $V[\widehat{Y}] \leq \frac{1}{2} \epsilon^2$  und deshalb  $MSE < \epsilon^2$ .

Weiter wird nun wieder die obere Schranke von  $N_l$

$$N_l \leq 2\epsilon^{-2} c_2 h_L^{-(1-\beta)/2} (1 - M^{-(1-\beta)/2})^{-1} h_l^{(\beta+1)/2} + 1$$

benutzt, um den Rechenaufwand zusammen mit *iv*), der Definition von  $N_l$  und der Ungleichung (3.22) wie folgt abzuschätzen

$$\begin{aligned} C &\stackrel{iv)}{\leq} \sum_{l=0}^L c_3 h_l^{-1} \left( 2\epsilon^{-2} c_2 h_L^{-(1-\beta)/2} (1 - M^{-(1-\beta)/2})^{-1} h_l^{(\beta+1)/2} + 1 \right) \\ &\leq c_3 \left( 2\epsilon^{-2} c_2 h_L^{-(1-\beta)/2} (1 - M^{-(1-\beta)/2})^{-1} \sum_{l=0}^L h_l^{-(1-\beta)/2} + \sum_{l=0}^L h_l^{-1} \right) \end{aligned}$$

$$\leq c_3 \left( 2\epsilon^{-2} c_2 h_L^{-(1-\beta)} (1 - M^{-(1-\beta)/2})^{-2} + \sum_{l=0}^L h_l^{-1} \right).$$

Aufgrund des ersten Teils von Ungleichung (3.13) gilt  $c_1 h_L^\alpha > \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon M^{-\alpha}$ . Werden beide Seiten durch  $c_1$  dividiert und mit  $\frac{-(1-\beta)}{\alpha} < 0$  potenziert, so gilt

$$h_L^{-(1-\beta)} < \left( \sqrt{2} c_1 \right)^{(1-\beta)/\alpha} M^{1-\beta} \epsilon^{-(1-\beta)/\alpha}.$$

Dies kombiniert mit Ungleichung (3.16) und  $\epsilon^{-2} < \epsilon^{-2-(1-\beta)/\alpha}$  für  $\epsilon < e^{-1}$ , führt zu folgendem Rechenaufwand

$$\begin{aligned} C &\leq c_3 \left( 2\epsilon^{-2} c_2 \left( \sqrt{2} c_1 \right)^{(1-\beta)/\alpha} M^{1-\beta} \epsilon^{-(1-\beta)/\alpha} (1 - M^{-(1-\beta)/2})^{-2} + \sum_{l=0}^L h_l^{-1} \right) \\ &\stackrel{(3.16)}{\leq} c_3 \left( 2\epsilon^{-2-(1-\beta)/\alpha} c_2 \left( \sqrt{2} c_1 \right)^{(1-\beta)/\alpha} M^{1-\beta} (1 - M^{-(1-\beta)/2})^{-2} + \frac{M^2}{M-1} \left( \sqrt{2} c_1 \right)^{1/\alpha} \epsilon^{-2} \right) \\ &\leq \epsilon^{-2-(1-\beta)/\alpha} \left( c_3 2 c_2 \left( \sqrt{2} c_1 \right)^{(1-\beta)/\alpha} M^{1-\beta} (1 - M^{-(1-\beta)/2})^{-2} + c_3 \frac{M^2}{M-1} \left( \sqrt{2} c_1 \right)^{1/\alpha} \right) \\ &= c_4 \epsilon^{-2-(1-\beta)/\alpha} \end{aligned}$$

mit

$$c_4 = \left( c_3 2 c_2 \left( \sqrt{2} c_1 \right)^{(1-\beta)/\alpha} M^{1-\beta} (1 - M^{-(1-\beta)/2})^{-2} + c_3 \frac{M^2}{M-1} \left( \sqrt{2} c_1 \right)^{1/\alpha} \right).$$

□

Ein besonderes Augenmerk gilt dem Parameter  $\beta$ . Er hängt von der starken Ordnung des numerischen Diskretisierungsverfahrens ab, während  $\alpha$  der schwachen Ordnung entspricht.

$\beta$  bestimmt die Konvergenzgeschwindigkeit der Varianz  $V_l$  für  $l \rightarrow \infty$ . In Kapitel 3.1 wurde gezeigt, dass in diesem Grenzwert das optimale  $N_l$  proportional zu  $\sqrt{V_l h_l} = O(h_l^{(\beta+1)/2})$  ist, da  $V_l = O(h_l^\beta)$ . Also ist der Rechenaufwand  $N_l h_l^{-1}$  proportional zu  $O(h_l^{(\beta-1)/2})$ . Daraus folgt, dass für  $\beta > 1$  mehr Berechnungen für die größeren Level (also für größere  $h_l$  bzw. kleinere  $l$ ) aufgewendet werden müssen, denn in diesem Fall ist  $h_l^{(\beta-1)/2} > h_{l+1}^{(\beta-1)/2}$ . Umgekehrt ist es im Fall  $\beta < 1$ , für den mehr Berechnungen in den feineren Leveln durchgeführt werden müssen. Ist  $\beta = 1$  so verteilen sich die Rechenkosten gleichmäßig über die Level.



Wendet man das Theorem bezüglich anderer Aufgabenstellungen an, so dürfte es weniger die Schwierigkeit sein den richtigen Parameter  $\alpha$  für Bedingung *i*) zu finden. Ähnliches gilt für die Bedingung *ii*) und *iv*). Problematischer ist es jedoch den richtigen Exponenten  $\beta$  herzuleiten oder bessere Schätzer für größere Betas zu finden.

## 3.3 Erweiterungen

### 3.3.1 Optimales M

Eine wichtige Frage für die MLMC Methode ist die Wahl des Paramaters  $M$ . Im Folgenden soll gezeigt werden, dass für das Euler-Verfahren unter Gültigkeit der Lipschitzschranke (2.6) für die Payofffunktion,  $M = 4$  gute Ergebnisse bringt.

Aus Kapitel 3.1 ist bekannt, dass in diesem Fall asymptotisch die Beziehung  $\text{Var}[\widehat{P}_l - P] \approx c_0 h_l$  für eine positive Konstante  $c_0$  gilt. Damit erhält man für den Korrelationskoeffizienten  $\rho \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned}
\text{Var}[\widehat{P}_l - \widehat{P}_{l-1}] &= \text{Var}[(\widehat{P}_l - P) - (\widehat{P}_{l-1} - P)] \\
&= \text{Var}[\widehat{P}_l - P] - 2\rho\sqrt{\text{Var}[\widehat{P}_l - P]\text{Var}[\widehat{P}_{l-1} - P]} + \text{Var}[\widehat{P}_{l-1} - P] \\
&\approx c_0 h_l + c_0 h_{l-1} - 2\rho\sqrt{c_0 h_l}\sqrt{c_0 h_{l-1}} \\
&\stackrel{h_l = h_{l-1} M^{-1}}{=} c_0 h_l + c_0 h_l M - 2\rho\sqrt{c_0 h_l}\sqrt{c_0 h_l M} \\
&= c_0 h_l (1 - 2\rho\sqrt{M} + M).
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen des größten und kleinsten Wertes für  $\rho$ , also  $\rho = 1$  bzw.  $\rho = -1$ , erhält man mit der binomischen Formel die Ungleichung

$$(\sqrt{M} - 1)^2 c_0 h_l \leq \text{Var}[\widehat{P}_l - \widehat{P}_{l-1}] \leq (\sqrt{M} + 1)^2 c_0 h_l. \quad (3.23)$$

Die obere Schranke entspricht also der Varianz des Samples bei perfekter positiver Korrelation und die untere Schranke der Varianz des Samples bei perfekter negativer Korrelation der beiden Schätzer.

Angenommen, der Wert für  $\text{Var}[\widehat{P}_l - \widehat{P}_{l-1}]$  ist durch das arithmetische Mittel der beiden Schranken aus (3.23) gegeben, dann ergibt sich nach Ausmultiplizieren der quadrierten

Terme

$$V_l = \text{Var}[\widehat{P}_l - \widehat{P}_{l-1}] \approx \frac{1}{2} \left( (\sqrt{M} - 1)^2 c_0 h_l + (\sqrt{M} + 1)^2 c_0 h_l \right) = (M - 1) c_0 h_l. \quad (3.24)$$

Wegen  $\text{Var}[\widehat{Y}_l] = N_l^{-1} V_l$  und der Eigenschaft *iii*) des Komplexitätstheorems  $\text{Var}[\widehat{Y}_l] \leq c_2 N_l^{-1} h_l$  sowie (3.24) gilt  $c_2 \approx (M - 1) c_0$  und deshalb ist mit der Definition von  $N_l$  im Fall  $\beta = 1$

$$N_l \approx 2\epsilon^{-2}(L + 1)(M - 1)c_0 h_l.$$

Der Rechenaufwand für  $\widehat{Y}_l$  ist wegen (3.7) proportional zu  $N_l(h_l^{-1} + h_{l-1}^{-1})$  und dafür gilt mit den bisherigen Rechnungen

$$N_l(h_l^{-1} + h_{l-1}^{-1}) \stackrel{M^{-1}=h_l/h_{l-1}}{=} N_l h_l^{-1} (1 + M^{-1}) \approx 2\epsilon^{-2}(L + 1)(M - M^{-1})c_0.$$

Durch Summieren über alle  $L + 1$  Level erhält man daraus für den Rechenaufwand

$$C \approx \sum_{l=0}^L N_l(h_l^{-1} + h_{l-1}^{-1}) \approx 2\epsilon^{-2}(L + 1)^2(M - M^{-1})c_0.$$

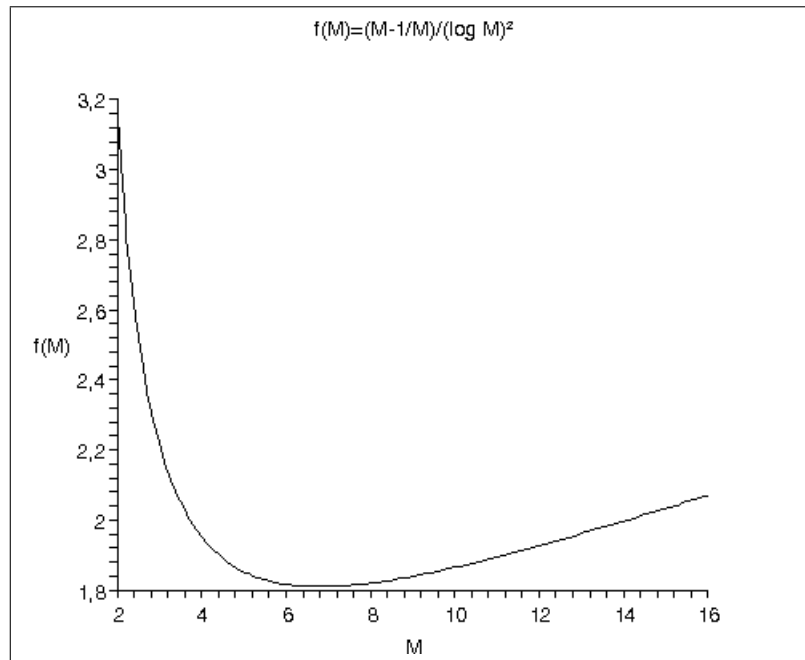


Abbildung 3.1: Optimales  $M$

Wird  $L = \frac{\ln \epsilon^{-1}}{\ln M} + O(1)$  für  $\epsilon \rightarrow 0$  gewählt, ist der Rechenaufwand somit ungefähr proportional zu

$$2\epsilon^{-2} (\ln \epsilon)^{-2} f(M),$$

wobei

$$f(M) = \frac{M - M^{-1}}{(\ln M)^2}.$$

Anhand Abbildung 3.1 erkennt man, dass das Minimum in der Nähe von  $M = 7$  liegt und der Funktionswert an dieser Stelle ungefähr halb so niedrig ist, wie für  $M = 2$ . Für die in Kapitel 4.2 präsentierten Ergebnisse wurde  $M = 4$  verwendet, da  $f(4)$  nicht wesentlich größer ist als  $f(7)$ , aber dadurch die Anzahl der zu simulierenden Level  $L$  erhöht wird, so dass die Eigenschaften des Algorithmus besser verdeutlicht werden können. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass die Anzahl der Level mit steigendem  $M$  sinkt (vgl. Konvergenzbedingung (3.26)), was für die meisten Ergebnisse zu einem Abbruch des Algorithmus bei  $L = 2$  geführt hätte.

### 3.3.2 Fehlerschätzung und Richardson Extrapolation

Bei der MLMC Methode kann der Schätzer des Korrekturterms  $E[\widehat{P}_l - \widehat{P}_{l-1}]$  zu jedem Level Aufschluss darüber geben, wie groß der verbleibende Fehler (Bias) ist. Bezogen auf das Euler-Verfahren mit  $\alpha = 1$  und der Lipschitzschranke (2.6) für die Payofffunktion folgt aus der Eigenschaft *i*) des Komplexitätstheorems, dass für eine Konstante  $c_1$  und  $l \rightarrow \infty$

$$E[P - \widehat{P}_l] \approx c_1 h_l$$

und deshalb ist

$$\begin{aligned} E[\widehat{P}_l - \widehat{P}_{l-1}] &= E[P - \widehat{P}_{l-1}] - E[P - \widehat{P}_l] \\ &\approx c_1 h_{l-1} - c_1 h_l \\ &\stackrel{h_{l-1} = h_l M}{=} (M - 1) c_1 h_l \\ &\approx (M - 1) E[P - \widehat{P}_l]. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Dieses Ergebnis können wir benutzen, um den verbleibenden Bias abzuschätzen. Der Bias soll im Betrag die obere Schranke  $\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$  besitzen, damit  $(\text{Bias})^2 < \frac{\epsilon^2}{2}$ . Man folgert

nun durch Multiplizieren der ersten Zeile mit dem Faktor  $M - 1$ , dass

$$\begin{aligned} \left| E[P - \widehat{P}_l] \right| &< \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon \\ \Rightarrow \left| E[P - \widehat{P}_l](M - 1) \right| \approx \left| E[\widehat{P}_l - \widehat{P}_{l-1}] \right| &< \frac{1}{\sqrt{2}}(M - 1)\epsilon. \end{aligned}$$

Für die MLMC Methode bedeutet dies, dass  $L$  so lange erhöht wird, bis  $\left| \widehat{Y}_L \right| < \frac{1}{\sqrt{2}}(M - 1)\epsilon$ .

Für die späteren Ergebnisse wird die genauere Bedingung

$$\max \left\{ M^{-1} \left| \widehat{Y}_{L-1} \right|, \left| \widehat{Y}_L \right| \right\} < \frac{1}{\sqrt{2}}(M - 1)\epsilon \quad (3.26)$$

benutzt.

Auf diese Weise wird sichergestellt, dass der verbleibende Fehler der letzten beiden Level von der gewünschten Größe ist.  $\left| \widehat{Y}_{L-1} \right|$  wurde mit dem Faktor  $M$  normiert, da  $\widehat{Y}_L \approx (M - 1)E[P - \widehat{P}_L]$  und  $\widehat{Y}_{L-1} \approx (M - 1)E[P - \widehat{P}_{L-1}]$ . Subtrahiert man die beiden Terme und formt sie um, erhält man

$$\begin{aligned} \widehat{Y}_L - \widehat{Y}_{L-1} &\approx (M - 1)E[P - \widehat{P}_L] - (M - 1)E[P - \widehat{P}_{L-1}] \\ \Rightarrow \widehat{Y}_{L-1} &\approx \widehat{Y}_L + (M - 1)E[\widehat{P}_L - \widehat{P}_{L-1}] \\ &\approx \widehat{Y}_L + \widehat{Y}_L(M - 1) \\ &= M\widehat{Y}_L. \end{aligned}$$

Im nächsten Abschnitt soll gezeigt werden, wie mit Hilfe der Richardson Extrapolation weiterer Rechenaufwand gespart werden kann. Die Richardson Extrapolation ist besonders hilfreich, wenn man mittels eines Diskretisierungsverfahrens zwei Näherungen  $A(h_1)$  und  $A(h_2)$  zu den unterschiedlichen Schrittweiten  $h_1$  und  $h_2$  erhalten hat. Weiter soll noch gelten, dass  $h_2 = \frac{h_1}{M}$ . Ist  $A$  die exakte Lösung des Problems und  $p$  die Ordnung des Diskretisierungsverfahrens, dann lässt sich die Lösung mittels einer Taylorreihe auf zwei verschiedene Arten ausdrücken, wobei  $K_1, K_2, \dots$  bekannte Konstanten sind

$$\begin{aligned} I : \quad A &= A(h_1) + K_1 h_1^p + K_2 h_1^{p+1} + \dots = A(h_1) + K_1 h_1^p + O(h_1^{p+1}) \\ II : \quad A &= A(h_2) + K_1 h_2^p + K_2 h_2^{p+1} + \dots = A(h_2) + K_1 h_2^p + O(h_2^{p+1}) \end{aligned}$$

$$= A\left(\frac{h_1}{M}\right) + K_1 \left(\frac{h_1}{M}\right)^p + O(h_1^{p+1}).$$

Wird II mit  $M^p$  multipliziert und I davon abgezogen, erhält man

$$\begin{aligned} (M^p - 1)A &= M^p A\left(\frac{h_1}{M}\right) + M^p K_1 \left(\frac{h_1}{M}\right)^p - A(h_1) - K_1 h_1^p + O(h_1^{p+1}) \\ \Rightarrow A &= \frac{M^p A\left(\frac{h_1}{M}\right) - A(h_1)}{M^p - 1} + O(h_1^{p+1}). \end{aligned}$$

Durch die Setzung

$$B(h_1) = \frac{M^p A\left(\frac{h_1}{M}\right) - A(h_1)}{M^p - 1}$$

ist  $B(h_1)$  eine Näherung für  $A$  der Ordnung  $p + 1$ , da

$$A = B(h_1) + O(h_1^{p+1}).$$

Auf die MLMC Methode bezogen würde dies bedeuten, dass der einfache Schätzer  $\hat{Y}_l = E[\hat{P}_l - \hat{P}_{l-1}]$ , der einen Fehler der Größenordnung  $O(h_l)$  (also  $p = 1$ ) besitzt, auf folgende Weise verbessert werden kann

$$\bar{Y}_l = \frac{M\hat{Y}_l - \hat{Y}_{l-1}}{M - 1},$$

für  $l = 0, 1, \dots, L$  und  $\hat{Y}_{-1} = 0$ .

Der Fehler von  $\bar{Y}_l$  ist somit nur noch von der Größe  $O(h_l^2)$ .

Indem der gemeinsame Schätzer  $\hat{Y} = \sum_{l=0}^L \hat{Y}_l$  durch den folgenden Ausdruck ersetzt wird

$$\begin{aligned} \left(\sum_{l=0}^L \hat{Y}_l\right) + (M-1)^{-1}\hat{Y}_L &= \frac{M}{M-1} \left\{ \left(1 - \frac{1}{M}\right) \left(\sum_{l=0}^L \hat{Y}_l\right) + M^{-1}\hat{Y}_L \right\} \\ &= \frac{M}{M-1} \left\{ \left(\hat{Y}_0 + \sum_{l=1}^L \hat{Y}_l\right) - \frac{1}{M} \left[ \left(\sum_{l=0}^L \hat{Y}_l\right) - \hat{Y}_L \right] \right\} \\ &= \frac{M}{M-1} \left\{ \hat{Y}_0 + \left(\sum_{l=1}^L \hat{Y}_l\right) - \frac{1}{M} \left(\sum_{l=1}^L \hat{Y}_{l-1}\right) \right\} \\ &= \frac{M}{M-1} \left\{ \hat{Y}_0 + \sum_{l=1}^L \left(\hat{Y}_l - M^{-1}\hat{Y}_{l-1}\right) \right\} \end{aligned}$$

$$= \sum_{l=0}^L \bar{Y}_l \quad (3.27)$$

ist auch der Fehler des gemeinsamen Schätzers von der Größe  $O(h_l^2)$  aufgrund der letzten Zeile dieser Umformung.

Eine andere Begründung für das Ändern des gemeinsamen Schätzers wird aus folgender Rechnung klar:

$$\begin{aligned} E[P] &= E[\hat{P}_L] + E[P - \hat{P}_L] \\ &\stackrel{(3.25)}{\approx} \sum_{l=0}^L \left( E[\hat{P}_l - \hat{P}_{l-1}] \right) + (M-1)^{-1} E[\hat{P}_L - \hat{P}_{L-1}] \\ &= \left( \sum_{l=0}^L \hat{Y}_l \right) + (M-1)^{-1} \hat{Y}_L. \end{aligned}$$

Der somit reduzierte Fehler hat Auswirkungen auf die Konvergenzbedingung, die im Richardson Falle abgeschwächt wird, so dass man schneller den gewünschten Bias erreicht. Da in diesem Falle für eine Konstante  $c_1$  und  $l \rightarrow \infty$

$$E[P - \hat{P}_l] \approx c_1 h_l^2$$

gilt, folgt mit analoger Rechnung zur Konvergenzbedingung ohne Richardson Extrapolation

$$\begin{aligned} E[\hat{P}_l - \hat{P}_{l-1}] &= E[P - \hat{P}_{l-1}] - E[P - \hat{P}_l] \\ &\approx c_1 h_{l-1}^2 - c_1 h_l^2 \\ &\stackrel{h_{l-1} = h_l M}{=} (M^2 - 1) c_1 h_l^2 \\ &\approx (M^2 - 1) E[P - \hat{P}_l]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

und

$$\begin{aligned} \hat{Y}_L - \hat{Y}_{L-1} &\approx (M^2 - 1) E[P - \hat{P}_L] - (M^2 - 1) E[P - \hat{P}_{L-1}] \\ \Rightarrow \hat{Y}_{L-1} &\approx \hat{Y}_L + (M^2 - 1) E[\hat{P}_L - \hat{P}_{L-1}] \\ &\approx \hat{Y}_L + \hat{Y}_L (M^2 - 1) \\ &= M^2 \hat{Y}_L. \end{aligned}$$

Diese beiden Ergebnisse werden wieder dazu benutzt, um den Bias durch  $\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$  abzuschätzen

$$\begin{aligned}
& \left| E[P - \hat{Y}] \right| < \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon \\
\Rightarrow & \left| E[P - \hat{P}_L - (M-1)^{-1}\hat{Y}_L](M^2-1) \right| < \frac{1}{\sqrt{2}}(M^2-1)\epsilon \\
& \Rightarrow \left| E[\hat{P}_L - \hat{P}_{L-1}] - \frac{M^2-1}{M-1}\hat{Y}_L \right| < \frac{1}{\sqrt{2}}(M^2-1)\epsilon \\
& \Rightarrow \left| E[\hat{P}_L - \hat{P}_{L-1}] - \frac{M^2-1}{M-1}\hat{Y}_L \right| < \frac{1}{\sqrt{2}}(M^2-1)\epsilon \\
& \Rightarrow \left| \hat{Y}_L - \frac{M^2-1}{(M-1)M^2}\hat{Y}_{L-1} \right| < \frac{1}{\sqrt{2}}(M^2-1)\epsilon.
\end{aligned}$$

Wegen  $\frac{M^2-1}{(M-1)M^2} = \frac{(M-1)(M+1)}{(M-1)M^2} = \frac{1}{M} + \frac{1}{M^2} \approx \frac{1}{M}$  kann man auch folgende Konvergenzbedingung benutzen

$$\left| \hat{Y}_L - \frac{1}{M}\hat{Y}_{L-1} \right| < \frac{1}{\sqrt{2}}(M^2-1)\epsilon. \quad (3.29)$$

### 3.3.3 Anzahl der Simulationen

Mit der Konvergenzbedingung aus dem vorherigen Teil wurde sichergestellt, dass der quadrierte Bias kleiner als  $\frac{1}{2}\epsilon^2$  ist. Die gleiche Schranke, die wir für die Varianz des gemeinsamen Schätzers benötigen, steuert man über die Anzahl der Samples. Wählt man

$$N_l = \left\lceil 2\epsilon^{-2}\sqrt{V_l h_l} \left( \sum_{l=0}^L \sqrt{V_l/h_l} \right) \right\rceil, \quad (3.30)$$

wird für die drei Fälle von  $\beta$  die Schranke für die Varianz erreicht.

# Kapitel 4

## Implementierung

In diesem Kapitel soll dargestellt werden, auf welche Weise der MLMC Algorithmus implementiert wird und auf welche Feinheiten bei der Programmierung zu achten sind. Schließlich wird er noch zu Testzwecken auf eine europäische und asiatische Option angewandt, um die theoretischen Ergebnisse zu verdeutlichen.

### 4.1 Algorithmus

Der MLMC-Algorithmus wird nun auf folgende Weise implementiert (Quellcode in Anhang A):

1. starte mit  $L = 0$
2. schätze  $V_L$ , wobei zu Beginn  $N_L = 10^4$  Samples genommen werden
3. berechne das optimale  $N_l$ ,  $l = 0, \dots, L$  mit Gleichung (3.30)
4. simuliere weitere Samples für das jeweilige Level, falls  $N_l$  größer geworden ist
5. falls  $L \geq 2$ , benutze den Konvergenztest in Gleichung (3.26) (ohne Richardson Extrapolation) oder (3.29) (mit Richardson Extrapolation) und brich ab, falls die Bedingung erfüllt ist
6. falls  $L < 2$  oder kein Abbruch, setze  $L := L + 1$  und gehe zu Schritt 2.

Zu Schritt 4 ist noch zu bemerken, dass, falls ein  $N_l$  aus Schritt 3 im Vergleich zum vorherigen Durchlauf größer geworden ist, der neue Wert im weiteren Verlauf die Anzahl der Samples zum Level  $l$  bestimmt und dadurch auch das  $V_l$  erneut berechnet werden



muss.

Außerdem sollte klar geworden sein, dass der MLMC Algorithmus heuristisch ist. Da die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  erst im Verlaufe des Algorithmus geschätzt werden, gibt es keine Garantie für einen MSE der Größenordnung  $O(\epsilon^2)$ . Dies wird daran deutlich, dass durch die Wahl des  $N_l$  in Gleichung (3.30) zwar die Varianzschranke erreicht wird, jedoch die Konvergenzbedingungen nicht sicherstellen, dass der Bias die geforderte Schranke unterschreitet, was insbesondere an der Schätzung  $E[P - \hat{P}_l] \approx c_1 h_l$  liegt. Die Konstante  $c_3$  folgt aus Gleichung (3.7) für den Rechenaufwand.

Für die folgenden Beispiele soll die MLMC Methode unter anderem mit der Monte Carlo Methode (MC) verglichen werden. Während bei MLMC der Rechenaufwand durch Gleichung (3.7) bestimmt wird, geschieht dies bei MC durch

$$C^* = \sum_{l=0}^L N_l^* M^l,$$

wobei  $N_l^* = 2\epsilon^{-2}\text{Var}[\hat{P}_l]$ , damit für die Varianz des Schätzers gilt

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{P}] &= \text{Var}\left[\frac{\sum_{l=0}^L \sum_{i=1}^{N_l} \hat{P}_l^i}{\sum_{l=0}^L N_l}\right] \\ &= \frac{\sum_{l=0}^L \sum_{i=1}^{N_l} \text{Var}[\hat{P}_l^i]}{(\sum_{l=0}^L N_l)^2} \\ &= \frac{\sum_{l=0}^L N_l \text{Var}[\hat{P}_l]}{(\sum_{l=0}^L N_l)^2} \\ &= \frac{1}{2}\epsilon^2 \frac{\sum_{l=0}^L N_l^2}{(\sum_{l=0}^L N_l)^2} \\ &\leq \frac{1}{2}\epsilon^2, \end{aligned} \tag{4.1}$$

da  $\frac{\sum_{l=0}^L N_l^2}{(\sum_{l=0}^L N_l)^2} \leq 1$ .

Wie bei der MLMC Methodik werden auch hier die Samples zu unterschiedlichen Leveln bzw. unterschiedlicher Schrittweite des Euler-Verfahrens simuliert. Der Gesamtschätzer bestimmt sich daraufhin als mit der Anzahl der Samples gewichteter Durchschnitt. Die Konvergenzbedingungen bleiben die gleichen, um Vergleichbarkeit zu garantieren.

Bei Anwendung der Richardson Extrapolation geht man für beide Methoden analog

vor. Die einzigen Unterschiede sind die Wahl des  $L$ , da die für Richardson erstellte Konvergenzbedingung (3.29) gewählt wird und die Bestimmung des Gesamtschätzers (vgl. Gleichung (3.27)).

## 4.2 Ergebnisse

Unter Benutzung einer geometrisch Brownschen Bewegung

$$dS = rSdt + \sigma SdW, \quad 0 < t < 1, \quad (4.2)$$

sollen in diesem Abschnitt vier unterschiedliche Optionen bewertet werden. Die Inputparameter wurden wie folgt gesetzt:  $S(0) = 1$ ,  $r = 0.05$  und  $\sigma = 0.2$ .

### 4.2.1 Europäische Option

In der folgenden Grafik werden einige Ergebnisse der MLMC Methode präsentiert, nach Anwendung auf eine Europäische Call Option, deren diskontierter Payoff durch

$$P = \exp(-0.05) \max(S(1) - 1, 0)$$

beschrieben wird. Der exakte Wert dieser Option beträgt gerundet 0.1045 (vgl. [10], Gleichung (13.20)). Das gleiche Ergebnis brachte auch der MLMC-Algorithmus bei einer Genauigkeit von  $\epsilon = 0.0001$ . Für  $\epsilon = 0.001$  ergab der Algorithmus einen Preis von 0.1039. Im oberen linken Diagramm von Abbildung 4.1 ist die Varianz des Logarithmus zur Basis  $M$  der einzelnen Payoffs  $\widehat{P}_l$  und der Samples  $\widehat{P}_l - \widehat{P}_{l-1}$  gegenüber dem Level  $l$  gezeichnet. Da die Steigung des Graphen der Samples ungefähr  $-1$  beträgt, bedeutet dies, dass die Varianz der Samples proportional zu  $M^{-l} = h_l$  ist, wie in iii) des Komplexitätstheorems vorausgesetzt. Für das Level  $l = 3$  ist die Varianz des Samples fast 800 mal kleiner, als die Varianz des Payoffs zu diesem Level, den man unter Benutzung der MC Methode erhalten hätte.

Die obere linke Graphik zeigt die Erwartungswerte des Payoffs, der Samples und des Terms  $\widehat{Y}_l - \widehat{Y}_{l-1}/M$ , der für die MLMC Methode mit Richardson Extrapolation steht (vgl. (3.27), Summand der vorletzten Zeile). Auch hier ist, wie vermutet, die Steigung der Samples  $-1$ , dies impliziert eine  $O(h)$  Konvergenz von  $E[\widehat{P}_l - \widehat{P}_{l-1}]$ . Außerdem wird deutlich, dass die Erwartungswerte im Falle der Richardson Extrapolation sogar noch schneller schwach konvergieren.

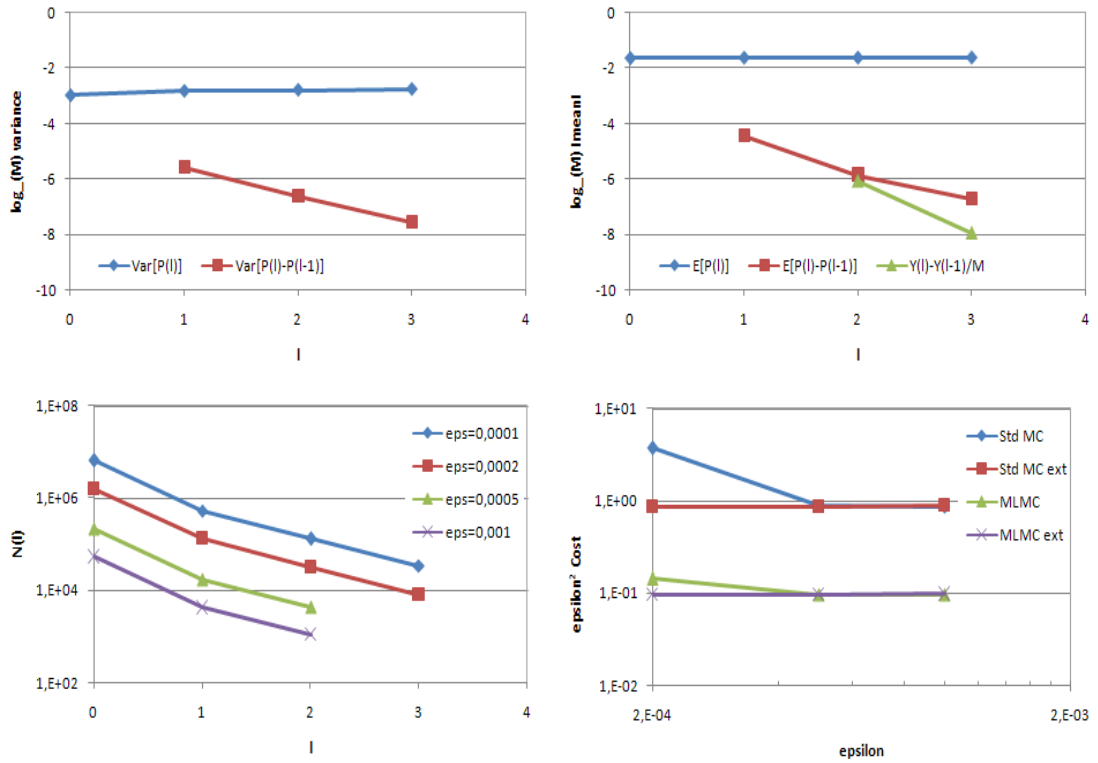


Abbildung 4.1: Ergebnisse Europäische Option

Das untere linke Diagramm beschreibt, wie sich die Anzahl der Samples zu den Levels bei festem  $\epsilon$  verhält. Es wird deutlich, dass bei steigendem  $l$  weniger Samples berechnet werden müssen und für fallendes  $\epsilon$ , also höherer Genauigkeit, mehr Samples.

In der unteren rechten Graphik werden die MLMC und die MC Methode jeweils mit und ohne Richardson Extrapolation verglichen. Es wurde der Rechenaufwand  $C$  multipliziert mit  $\epsilon^2$  gegenüber  $\epsilon$  geplottet, da man aufgrund des Komplexitätstheorems erwartet, dass  $C\epsilon^2 \leq c_4(\log \epsilon)^2$ , also eine leichte Abhängigkeit von  $\epsilon$  besteht. Der MLMC-Graph ist demnach für  $\epsilon < 1$  fallend in  $\epsilon$ , wobei zu beachten ist, dass der Knick durch den Wechsel von  $L = 3$  auf  $L = 2$  entstanden ist. Weiter sieht man, dass in diesem Fall die MLMC Methode deutlich schneller ist als die MC Methode (um den Faktor 10) und dass auch in beiden Fällen die Richardson Extrapolation eine Verbesserung bringt.

Der RMSE/ $\epsilon$  lag in diesen Rechnungen für die MLMC Methode zwischen  $0.59 - 1.03$  und im Fall der Richardson Extrapolation zwischen  $0.59 - 0.71$ . Da der Teil  $(E[\widehat{Y} - Y])^2$  aus Gleichung (2.8) nicht bestimmt werden kann, wird er aufgrund von (3.25) durch  $(E[\widehat{Y}_L]/(M-1))^2$  geschätzt und im Fall der Richardson Extrapolation durch  $(E[\widehat{Y}_L]/(M^2-1))^2$  wegen (3.28).

## 4.2.2 Asiatische Option

In Abbildung 4.2 befinden sich die Ergebnisse im Falle des diskontierten Payoffs einer Asiatischen Option:

$$P = \exp(-0.05) \max(\bar{S} - 1, 0),$$

wobei  $\bar{S} = \int_0^1 S(t)dt$  numerisch durch  $\bar{S}_t = \sum_{n=1}^{N_t} \frac{1}{2}(\hat{S}_n + \hat{S}_{n-1})h_t$  approximiert wird. Der exakte Wert der Option liegt gerundet bei 0.0576 (vgl. [10], Abschnitt 22.10) und der Algorithmus ergab bei einer Genauigkeit von  $\epsilon = 0.0001$  den Optionspreis von 0.0577.

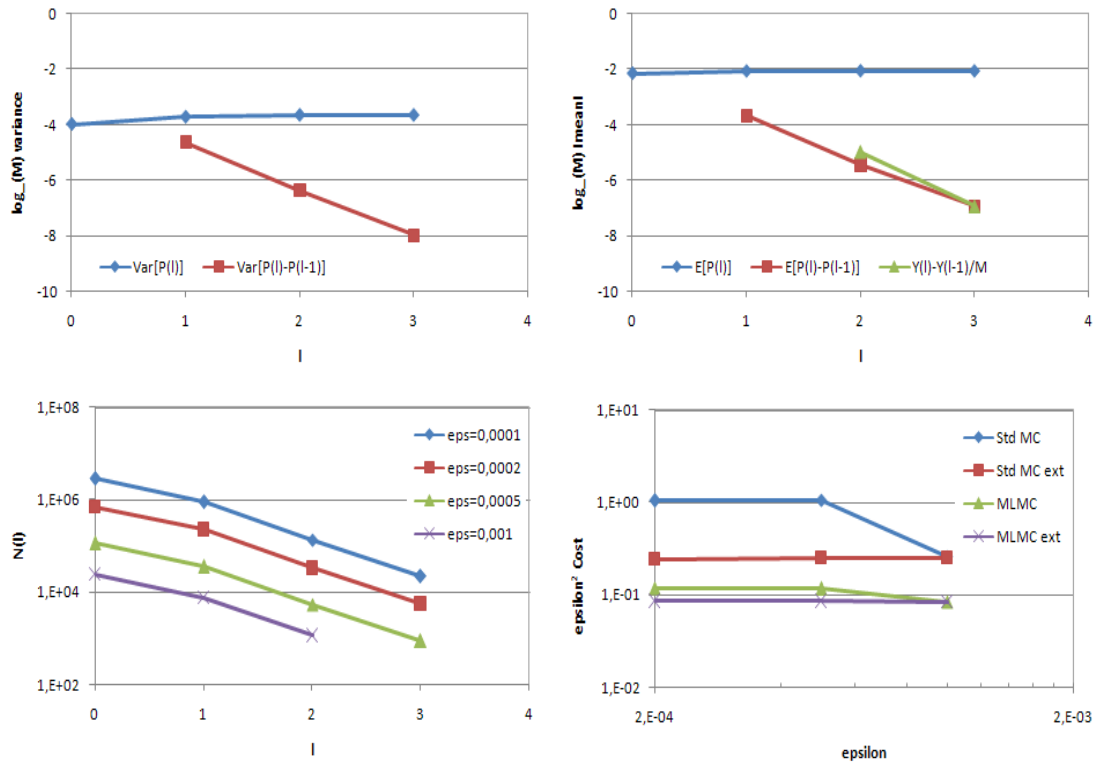


Abbildung 4.2: Ergebnisse Asiatische Option

Die Diagramme ähneln sehr dem Beispiel der Europäischen Option. In den oberen beiden Graphiken fällt auf, dass die Varianz und der Erwartungswert der Samples mehr als nur  $O(h)$  Konvergenz zu besitzen scheint, da die Steigung im ersten Fall  $-1.67$  und im zweiten  $-1.62$  beträgt. Dies könnte auch der Grund dafür sein, dass durch Richardson Extrapolation keine großen Vorteile erreicht werden können (siehe Diagramm rechts oben und rechts unten). Der  $\text{RMSE}/\epsilon$  lag zwischen  $0.58 - 0.73$  im Falle der MLMC Methode und zwischen  $0.57 - 0.64$  bei Hinzufügen der Richardson Extrapolation.

# Kapitel 5

## Starke Konvergenzordnungen

Für die MLMC Methode ist die starke Konvergenzordnung des Approximationsverfahrens vonnöten. Dazu werden hier zwei Fälle betrachtet, die in den beiden nachfolgenden Kapiteln von Bedeutung sind.

### 5.1 Indikatorfunktionen

In diesem Abschnitt soll eine obere Schranke für den Approximationsfehler von  $E[|g(X) - g(\hat{X})|^p]$  berechnet werden, wobei  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  eine Indikatorfunktion ist,  $X$  die Lösung der SDE (2.1), für die weiterhin die Voraussetzungen aus Definition 2.3 gelten und  $\hat{X}$  ist deren Approximation. Im Folgenden wird bewiesen (analog zu [4], S.1-9), dass für Indikatorfunktionen das Euler-Verfahren starke Ordnung  $1/2 - \epsilon$  besitzt, wobei  $\epsilon \in (0, 1/2]$ . Die Ergebnisse dieses Abschnitts werden für das folgende Kapitel benötigt, in denen die Payofffunktion einer Option nicht stetig ist, sondern einen Sprung hat. Eine Funktion mit solch einer Unstetigkeitsstelle lässt sich durch eine Indikatorfunktion darstellen.

#### 5.1.1 Voraussetzungen

Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X, \hat{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Zufallsvariablen, wobei  $\hat{X}$  eine Approximation von  $X$  in der  $L_p$ -Norm ist. Das bedeutet, dass für eine Folge von Zufallsvariablen  $\hat{X}_n, n \in \mathbb{N}$ , gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} E[|\hat{X}_n - X|^p] = 0$ .

**Definition 5.1** Sei  $X$  eine Zufallsvariable, dann lässt sich eine nicht-steigende Umordnung  $X^* : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$  von  $X$  definieren durch

$$X^*(s) := \inf \{c \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X > c) \leq s\},$$

wobei  $\inf \emptyset = \infty$ .

**Bemerkung 5.2** Die Zufallsvariable  $X^*$  besitzt folgende Eigenschaften:

1.  $X^*(1) = -\infty$ ,  $X^*(0) = \infty$  falls  $X$  nicht beschränkt ist und  $X^*(s) \in \mathbb{R}$  für  $s \in (0, 1)$ ,
2.  $X^*$  ist rechtsstetig,
3.  $X^*$  hat die gleiche Verteilung wie  $X$  bezüglich des Lebesgue Maßes auf  $[0, 1]$ .

Beweise dazu finden sich in [2], Kapitel 2.1.

Außerdem sei noch bemerkt, dass falls  $F(c) = \mathbb{P}(X \leq c)$  die Verteilungsfunktion von  $X$  ist, dann lässt sich  $X^*$  auch schreiben als  $X^*(s) = \inf \{c \in \mathbb{R} : 1 - F(c) \leq s\} = \inf \{c \in \mathbb{R} : c \geq F^{-1}(1 - s)\}$ , da  $F$  monoton steigend ist. Die Umkehrfunktion  $F^{-1}$  der Verteilungsfunktion muss dazu natürlich existieren. Da die Quantilsfunktion einer Zufallsvariablen  $Y$  durch  $Q(s) := \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq s\}$  definiert ist, folgt außerdem  $X^*(s) = Q(1 - s)$ .

**Definition 5.3** Definiere die minimale Steigung der Funktion  $X^*$  zum Level  $K$  durch  $d_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ ,

$$d_X(K) := \inf_{s \in [0, 1], s \neq \alpha(K)} \left\{ \frac{|X^*(s) - K|}{|s - \alpha(K)|} \right\},$$

mit

$$\alpha(K) = \mathbb{P}(X \geq K).$$

Nimmt man an, dass die Verteilungsfunktion  $F(c) = \mathbb{P}(X \leq c)$  stetig und streng monoton steigend ist, so ist  $\mathbb{P}(X > c) = 1 - F(c)$  stetig sowie streng monoton fallend und damit bijektiv. Wegen  $\mathbb{P}(X = c) = 0$  folgt

$$\begin{aligned} X^*(s) &= \inf \{c \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X > c) \leq s\} \\ &= \inf \{c \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \geq c) = s\} \\ &= \{c \in \mathbb{R} : \alpha(c) = s\} \\ &= \alpha^{-1}(s). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Wird  $\alpha(K) = s_0$  gesetzt, so gilt aufgrund der obigen Umformung, dass  $X^*(s_0) = K$  und der Differenzenquotient aus Definition 5.3 kann umgeschrieben werden zu  $\frac{|X^*(s) - X^*(s_0)|}{|s - s_0|}$ . Dies verdeutlicht, weshalb in Definition 5.1 von einer minimalen Steigung die Rede ist.

Weiter sei noch bemerkt, dass die Chi-Funktion  $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$  für  $a, b \in \mathbb{R}$  wie folgt definiert ist

$$\chi_{[a,b)}(X) := \begin{cases} 1 & \text{für } X \in [a, b) \\ 0 & \text{für } X \notin [a, b). \end{cases} \quad (5.2)$$

Außerdem wird der folgende Satz benötigt:

**Hilfssatz 5.4** Seien  $X$  und  $Y$  zwei Zufallsvariablen mit Werten in  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{P}(X \geq a, Y < a) = \mathbb{P}(a \leq X < b)$  für  $a < b$  und  $a, b \in \mathbb{R}$ , dann gilt

$$E[|X - a| \chi_{\{X \geq a, Y < a\}}] \geq E[|X - a| \chi_{\{a \leq X < b\}}].$$

**Beweis.** Falls  $X \leq a$  so sind beide Erwartungswerte Null und es gilt Gleichheit. Sei also  $X > a$  und  $f_{X,Y}(x, y)$  die gemeinsame Dichte von  $X$  und  $Y$ , so rechnet man

$$\begin{aligned} E[|X - a| \chi_{\{X \geq a, Y < a\}}] &= E[|X - a| \chi_{\{a \leq X < b, Y < a\}}] + E[|X - a| \chi_{\{b \leq X, Y < a\}}] \\ &= E[|X - a| \chi_{\{a \leq X < b, Y < a\}}] \\ &\quad + \int_{[b, \infty) \times (-\infty, a)} |X - a| f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &\geq E[|X - a| \chi_{\{a \leq X < b, Y < a\}}] \\ &\quad + \int_{[a, b) \times [a, \infty)} |X - a| f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= E[|X - a| \chi_{\{a \leq X < b, Y < a\}}] + E[|X - a| \chi_{\{a \leq X < b, Y \geq a\}}] \\ &= E[|X - a| \chi_{\{a \leq X \leq b\}}], \end{aligned}$$

da

$$\int_{[b, \infty) \times (-\infty, a)} |X - a| f_{X,Y}(x, y) dx dy \geq \int_{[a, b) \times [a, \infty)} |X - a| f_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

Dies gilt, weil zum Einen

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(b \leq X, Y < a) &= \mathbb{P}(X \geq a, Y < a) - \mathbb{P}(a \leq X < b, Y < a) \\ &\stackrel{\text{Voraussetzung}}{=} \mathbb{P}(a \leq X < b) - \mathbb{P}(a \leq X < b, Y < a) \\ &= \mathbb{P}(a \leq X < b, Y > a) \\ \Rightarrow \int_{[b, \infty) \times (-\infty, a)} f_{X,Y}(x, y) dx dy &= \int_{[a, b) \times [a, \infty)} f_{X,Y}(x, y) dx dy \end{aligned}$$

und und zum Anderen der Integrand  $|x - a|$  für Werte von  $x > b$  größer ist als für Werte von  $x \in [a, b)$ .

□

### 5.1.2 Sätze

Nachdem die Voraussetzungen geklärt wurden, kann nun die starke Ordnung des Euler-Verfahrens für Indikatorfunktionen bestimmt werden. Mit Satz 5.9 wird daraufhin der Bezug zur MLMC Methode erstellt, da man dadurch eine Schranke für die Varianz aus Bedingung iii) des Komplexitätstheorems erhält.

**Satz 5.5** *Angenommen  $X$  ist eine Zufallsvariable, dann gelten die folgenden Behauptungen:*

- i) *falls  $X$  eine beschränkte Dichte  $f_X$  besitzt, dann gilt für alle Zufallsvariablen  $\hat{X}$ , für alle  $K \in \mathbb{R}$  und alle  $0 < p < \infty$ , dass*

$$E \left[ \left| \chi_{[K, \infty)}(X) - \chi_{[K, \infty)}(\hat{X}) \right| \right] \leq 3D_X(K)^{\frac{p}{p+1}} \left( E \left[ \left| X - \hat{X} \right|^p \right] \right)^{\frac{1}{p+1}},$$

wobei

$$D_X(K) := \frac{1}{d_X(K)} \in (0, \sup f_X].$$

*Darüberhinaus ist die Potenz  $\frac{p}{p+1}$  optimal, das heißt, falls*

$$E \left[ \left| \chi_{[K, \infty)}(X) - \chi_{[K, \infty)}(\hat{X}) \right| \right] \leq C(X, K, p) \left( E \left[ \left| X - \hat{X} \right|^p \right] \right)^{\frac{1}{p+1}} \quad (5.3)$$

*für alle Zufallszahlen  $\hat{X}$ , kann die Potenz  $\frac{p}{p+1}$  nicht durch eine Potenz  $q$  mit  $\frac{p}{p+1} < q < \infty$  ersetzt werden.*

- ii) *Falls  $p_0 > 0$  existiert, so dass Gleichung (5.3) für alle  $p_0 \leq p < \infty$ , alle  $K \in \mathbb{R}$  und alle Zufallsvariablen  $\hat{X}$  gilt, und falls ein  $B_X > 0$  existiert, so dass  $C(X, K, p) \leq B_X$ , dann hat  $X$  eine beschränkte Dichte.*

**Beweis.** Zuerst soll Teil i) gezeigt werden. Sei dafür  $K \in \mathbb{R}$  fest,  $0 < p < \infty$  und  $\hat{X}$  eine Zufallsvariable, so dass

$$E \left[ \left| \chi_{[K, \infty)}(X) - \chi_{[K, \infty)}(\hat{X}) \right| \right] = \epsilon$$



für ein  $\epsilon \in (0, 1]$ , da die Chi-Funktion nur die Werte 0 oder 1 annehmen kann. Definiere weiter  $\epsilon_1 := \mathbb{P}(X \geq K, \widehat{X} < K)$  und  $\epsilon_2 := \mathbb{P}(X < K, \widehat{X} \geq K)$ . Damit folgt, dass

$$\begin{aligned}
\epsilon &= E \left[ |\chi_{[K, \infty)}(X) - \chi_{[K, \infty)}(\widehat{X})| \right] \\
&= E \left[ \chi_{\{X \geq K, \widehat{X} < K\} \cup \{X < K, \widehat{X} \geq K\}} \right] \\
&= \mathbb{P}(X \geq K, \widehat{X} < K) + \mathbb{P}(X < K, \widehat{X} \geq K) \\
&= \epsilon_1 + \epsilon_2,
\end{aligned}$$

aufgrund der Eigenschaften der Indikatorfunktion und der Disjunktheit der beiden vereinigten Ereignisse.

Mit dem gleichen Argument gilt die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
E \left[ |X - \widehat{X}|^p \right] &\geq E \left[ |X - \widehat{X}|^p \chi_{\{X \geq K, \widehat{X} < K\} \cup \{X < K, \widehat{X} \geq K\}} \right] \\
&= E \left[ |X - \widehat{X}|^p \chi_{\{X \geq K > \widehat{X}\} \cup \{X < K \leq \widehat{X}\}} \right] \\
&\geq E \left[ |X - K|^p \chi_{\{X \geq K > \widehat{X}\} \cup \{X < K \leq \widehat{X}\}} \right] \\
&= E \left[ |X - K|^p \chi_{\{X \geq K, \widehat{X} < K\}} \right] + E \left[ |X - K|^p \chi_{\{X < K, \widehat{X} \geq K\}} \right]. \quad (5.4)
\end{aligned}$$

Diese beiden Summanden sollen nun weiter abgeschätzt werden.

Dazu lässt sich ein  $c_0 \in [K, \infty]$  finden, so dass  $\mathbb{P}(K \leq X < c_0) = \epsilon_1$ . Dies ist möglich wegen  $\epsilon_1 = \mathbb{P}(X \geq K, \widehat{X} < K) \leq \mathbb{P}(K \leq X)$  und weil  $X$  eine beschränkte Dichte  $f_X$  besitzt, so dass  $f(c_0)$  auch existiert. Aus der Eigenschaft iii) der umgeordneten Funktion  $X^*$  folgt, dass  $\lambda(\{K \leq X^* < c_0\}) = \epsilon_1$ , wobei  $\lambda$  das Lebesgue-Maß beschreibt (dies wird in der folgenden Umformung bei (\*) benutzt). Es sei bemerkt, dass  $c_0$  nicht eindeutig sein muss (z.B. wenn die Dichtefunktion in einem Bereich Null ist).

$$\begin{aligned}
E \left[ |X - K|^p \chi_{\{X \geq K, \widehat{X} < K\}} \right] &\stackrel{\text{Hilfssatz 5.4}}{\geq} E \left[ |X - K|^p \chi_{[K, c_0)}(X) \right] \\
&\stackrel{(*)}{=} \int_{[0, 1]} |X^*(s) - K|^p \chi_{[K, c_0)}(X^*) ds \\
&\stackrel{(**)}{=} \int_{\alpha - \epsilon_1}^{\alpha} |X^*(s) - K|^p ds \\
&\geq \int_{\alpha - \epsilon_1}^{\alpha} (d_X(K) |s - \alpha(K)|)^p ds \\
&= \int_{-\epsilon_1}^0 (d_X(K))^p (|s|)^p ds
\end{aligned}$$

$$= \frac{d_X(K)^p \epsilon_1^{p+1}}{p+1}. \quad (5.5)$$

Umformung (\*\*) gilt, da  $X^*(s) \in [K, c_0)$  genau dann, wenn  $s \in [\alpha - \epsilon_1, \alpha]$ . Dies folgt direkt aus der Definition von  $X^*(s)$ , da  $X^*(\alpha - \epsilon_1) = \inf \{c \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X > c) \leq \alpha - \epsilon_1\}$  und mit  $\alpha - \epsilon_1 = \mathbb{P}(X \geq K) - \mathbb{P}(K \leq X < c_0) = \mathbb{P}(X \geq c_0)$  ist  $X^*(\alpha - \epsilon_1) = c_0$ . Analog erhält man  $X^*(\alpha) = K$ . Danach wird benutzt, dass  $d_X(K) \leq \frac{|X^*(s) - K|}{|s - \alpha(K)|}$ , was aus der Definition von  $d_X(K)$  folgt und in den letzten beiden Umformungen werden die Grenzen des Integrals verschoben sowie das Integral ausgerechnet.

Um den zweiten Summanden abzuschätzen, findet man ein  $c_1 \in [-\infty, K)$ , so dass  $\mathbb{P}(c_1 \leq X < K) = \epsilon_2$  und deshalb auch  $\lambda(\{c_1 \leq X < K\}) = \epsilon_2$ . Die weiteren Argumente verlaufen analog zum ersten Summanden. Es folgt

$$\begin{aligned} E[|X - K|^p] \chi_{\{X < K, \hat{X} \geq K\}} &\stackrel{\text{Hilfssatz 5.4}}{\geq} E[|X - K|^p] \chi_{[c_1, K)}(X) \\ &= \int_{[0,1]} |X^*(s) - K|^p \chi_{[c_1, K)}(X^*) ds \\ &= \int_{\alpha}^{\alpha + \epsilon_2} |X^*(s) - K|^p ds \\ &\geq \int_{\alpha}^{\alpha + \epsilon_2} d_X(K) |s - \alpha(K)| ds \\ &= \int_0^{\epsilon_2} d_X(K) s ds \\ &= \frac{d_X(K)^p \epsilon_2^{p+1}}{p+1}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Weiter sei bemerkt, dass  $\alpha - \epsilon_1 \geq 0$ , wegen  $\{X \geq K, \hat{X} < K\} \subseteq \{X \geq K\}$  und  $\alpha + \epsilon_2 \leq 1$ , da  $1 - \alpha = \mathbb{P}(X < K)$  und  $\{X < K, \hat{X} \geq K\} \subseteq \{X < K\} \subseteq \Omega$ . Dies benötigt man in den obigen Abschätzungen, da  $X^*(s)$  nur für ein  $s \in [0, 1]$  definiert ist.

Einsetzen dieser Abschätzungen in (5.4) liefert

$$E[|X - \hat{X}|^p] \geq \frac{d_X(K)^p (\epsilon_1^{p+1} + \epsilon_2^{p+1})}{p+1} \geq \frac{d_X(K)^p \epsilon^{p+1}}{2^p(p+1)}, \quad (5.7)$$

da für  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $p \in \mathbb{R}^+$  gilt  $(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ . Dies wird mit der Hölder-Ungleichung  $\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^n |y_k|^q)^{\frac{1}{q}}$  für  $1 \leq p, q \leq \infty$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  deutlich, indem  $n = 2$ ,  $x_1 = a$ ,  $x_2 = b$  und  $y_1 = y_2 = 1$  gesetzt wird.

Ungleichung (5.7) wird nun nach  $\epsilon = E \left[ \left| \chi_{[K,\infty)}(X) - \chi_{[K,\infty)}(\widehat{X}) \right| \right]$  umgestellt

$$E \left[ \left| \chi_{[K,\infty)}(X) - \chi_{[K,\infty)}(\widehat{X}) \right| \right] \leq 2^{\frac{p}{p+1}} (p+1)^{\frac{1}{p+1}} \left( \frac{1}{d_X(K)} \right)^{\frac{p}{p+1}} \left( E \left[ \left| X - \widehat{X} \right|^p \right] \right)^{\frac{1}{p+1}}. \quad (5.8)$$

Außerdem gelten die Ungleichungen

$$2^{\frac{p}{p+1}} (p+1)^{\frac{1}{p+1}} \leq 2e^{\frac{1}{2e}} \leq 3. \quad (5.9)$$

Die hintere der beiden Ungleichungen wird durch das Einsetzen des Wertes für  $e$  offensichtlich. Den vorderen Teil zeigt man wie folgt:

$$\left( \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln \left( \frac{x}{2} \right)} = e^{g(x)} \leq e^{\max_x g(x)}$$

für  $g(x) = \frac{1}{x} \ln \left( \frac{x}{2} \right)$  und die Ungleichung zum Schluss gilt, da die e-Funktion monoton steigend ist.

Berechne das Maximum von  $g(x)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dg(x)}{dx} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1 - \ln \left( \frac{x}{2} \right)}{x^2} &= 0 \\ \Rightarrow x &= 2e. \end{aligned}$$

An der Stelle  $x = 2e$  ist das Maximum, da

$$\frac{d^2g(x)}{dx^2} = \frac{2 \ln \left( \frac{x}{2} \right) - 3}{x^3} \Rightarrow \frac{d^2g}{dx^2}(2e) = \frac{-1}{(2e)^3} < 0.$$

Mit  $g(2e) = \frac{1}{2e}$  und  $x = p+1$  folgt

$$\left( \frac{p+1}{2} \right)^{\frac{1}{p+1}} \leq e^{\frac{1}{2e}} \Rightarrow 2^{\frac{p}{p+1}} (p+1)^{\frac{1}{p+1}} \leq 2e^{\frac{1}{2e}}.$$

Weiter ist noch zu zeigen, dass

$$D_X(K) := \frac{1}{d_X(K)} \in (0, \sup f_X]. \quad (5.10)$$

Die Beschränktheit von  $d_X(K)$  folgt aus der Definition und somit ist  $D_X(K) > 0$ .

Um die zweite Abschätzung zu zeigen, wird der Einfachheit halber angenommen, dass die Verteilungsfunktion von  $X$  stetig und streng monoton ist. Somit gelten die vor und nach Definition 5.3 beschriebenen Eigenschaften.

Es gilt

$$\begin{aligned}
 d_X(K) &= \inf_{\substack{s \in [0,1] \\ s \neq \alpha(K)}} \left\{ \frac{|X^*(s) - K|}{|s - \alpha(K)|} \right\} \\
 &\stackrel{(*)}{\geq} \inf_{s \in [0,1]} \left| \frac{d}{ds} X^*(s) \right| \\
 &= \inf_{s \in [0,1]} \left| \frac{d}{ds} (F^*)^{-1}(s) \right| \\
 &= \inf_{s \in [0,1]} \left| \frac{d}{ds} F^{-1}(s) \right| \\
 &\stackrel{(**)}{=} \inf_{s \in [0,1]} \left| \frac{1}{\frac{d}{ds} F(s)} \right| \\
 &= \inf_{s \in [0,1]} \left| \frac{1}{f(s)} \right| \\
 &\geq \frac{1}{\sup f_X}.
 \end{aligned}$$

In der obigen Umformung wird bei (\*) benutzt, dass  $X^*(s)$  stetig und streng monoton ist. Die folgenden beiden Schritte gelten, aufgrund der Eigenschaft, dass  $F^*$  die Umkehrfunktion von  $X^*$  ist und da die kleinste Steigung von  $(F^*)^{-1}$  im Betrag mit der von  $F^{-1}$  übereinstimmt, weil die Funktionen durch eine vertikale Spiegelung ineinander überführbar sind. Mit dem Satz zur Ableitung der Umkehrfunktion folgt schließlich (\*\*) (vgl. [15], S.117).

Ist die Funktion  $F(x)$  nicht stetig und streng monoton, muss bei den Umformungen auf mögliche Sprünge geachtet werden, und darauf, dass die Verteilungsfunktion stückweise konstant sein kann.

(5.9) und (5.10) in (5.8) eingesetzt, ergibt die Behauptung von i).

Die zweite Behauptung von i), die Optimalität der Potenz  $\frac{p}{p+1}$  soll nicht bewiesen werden, sondern wird anhand eines Beispiels nach dem Beweis verdeutlicht.

Für den Beweis von ii) sei  $\delta > 0$  und wähle  $\widehat{X}$ , so dass  $\widehat{X} = X - \delta$ . Daraus folgt mit einer ähnlichen Umformung wie im Beweis von Teil i)

$$\begin{aligned} E \left[ \left| \chi_{[K, \infty)}(X) - \chi_{[K, \infty)}(\widehat{X}) \right| \right] &= \mathbb{P}(X \geq K, X - \delta < K) + \mathbb{P}(X < K, X - \delta \geq K) \\ &= \mathbb{P}(K \leq X < K + \delta), \end{aligned}$$

da  $\mathbb{P}(X < K, X - \delta \geq K) = 0$ , so dass für ein  $p > p_0$  und den weiteren Voraussetzungen aus Behauptung ii) gilt

$$\mathbb{P}(K \leq X < K + \delta) \leq C(X, K, p) \left( E \left[ \left| X - \widehat{X} \right|^p \right] \right)^{\frac{1}{p+1}} \leq B_X (E[|\delta|^p])^{\frac{1}{p+1}} \leq B_X \delta^{\frac{p}{p+1}}.$$

Lässt man  $p$  gegen unendlich gehen, da  $p$  beliebig groß gewählt werden darf, gilt

$$\mathbb{P}(K \leq X < K + \delta) \leq B_X \delta. \quad (5.11)$$

Sei nun  $N \subset \mathbb{R}$  eine Nullmenge bezüglich des Lebesgue-Maßes und sei  $\epsilon > 0$ . Da das äußere Lebesgue-Maß (vgl. [12], Definition 1.46) von  $N$  ebenfalls Null ist, findet man eine Folge  $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , so dass  $N \subset \cup_j I_j$  und  $\sum |I_j| \leq \epsilon$ . Für die Verteilung  $\mathfrak{S}_X$  von  $X$  gilt somit

$$\mathfrak{S}_X((a, b)) \leq \mathfrak{S}_X([a, b]) \leq B_X |a - b|$$

und damit ist

$$\mathfrak{S}_X(N) \leq \mathfrak{S}_X(\cup_j I_j) \leq \sum_j \mathfrak{S}_X(I_j) \leq B_X \sum_j |I_j| \leq B_X \epsilon.$$

Da  $\epsilon$  beliebig klein gewählt werden darf, impliziert diese Ungleichung  $\mathfrak{S}_X(N) = 0$  und deshalb ist  $\mathfrak{S}_X$  absolutstetig (vgl. [12], Definition 7.30) bezüglich des Lebesgue-Maßes, da  $\lambda(N) = 0 \rightarrow \mathfrak{S}_X(N) = 0$ . Mit dem Radon-Nikodym Theorem (vgl [16], Satz 6.4) folgt, dass dann eine messbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  existiert, so dass

$$\mathfrak{S}_X(M) = \int_M f(x) dx$$

für alle messbaren  $M \subseteq \mathbb{R}$ . Des Weiteren ist  $f$  integrierbar, da  $\mathfrak{S}_X(\mathbb{R}) = 1$ .  
 Man definiere sich nun eine Funktion  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , so dass

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx.$$

Es folgt  $\Phi'(t) = f(t)$  (vgl. [17], Theorem 8.14). Außerdem ist

$$\Phi'(t) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\Phi(t+h) - \Phi(t)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{B_X h}{h} = B_X,$$

da  $\Phi(t+h) - \Phi(t) = \mathfrak{S}_X((t, t+h))$ . Es folgt schließlich  $f(t) \leq B_X$  und die Behauptung. □

Es sei noch bemerkt, dass man entsprechende Ergebnisse für die Funktion  $\chi_{(-\infty, K]}$  durch Wahl des Komplements des Intervalls  $(K, \infty)$  erhält. Für  $\chi_{(-\infty, K]}$  betrachtet man die Zufallsvariablen  $-X$  und  $-\widehat{X}$ . Für  $\chi_{(K, \infty)}$  benutzt man das Komplement und die negativen Zufallsvariablen.

**Beispiel 5.6** Sei  $\Omega = [0, 1]$  ausgestattet mit dem Lebesgue-Maß sowie  $K = \frac{1}{2}$  und  $\epsilon < 1$ . Wähle  $X(\omega) = \omega$ , dann ist die Dichte  $f_X(x) = 1$  beschränkt und deshalb auch  $d_X(\frac{1}{2}) = 1$ . Definiere

$$\widehat{X} = \begin{cases} X, & \text{falls } \omega \in [0, \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}] \cup (\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}, 1], \\ X + \frac{\epsilon}{2}, & \text{falls } \omega \in [\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{2}], \\ X - \frac{\epsilon}{2}, & \text{falls } \omega \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}]. \end{cases}$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} E \left[ \left| X - \widehat{X} \right|^p \right] &= E \left[ \left( \frac{\epsilon}{2} \right)^p \chi_{[\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}]}(X) \right] \\ &= \left( \frac{\epsilon}{2} \right)^p \mathbb{P} \left( X \in \left[ \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2} \right) \right) \\ &= \frac{\left( d_X \left( \frac{1}{2} \right) \right)^p \epsilon^{p+1}}{2^p}, \end{aligned}$$

da  $d_X \left(\frac{1}{2}\right)^p = 1$  und  $\mathbb{P} \left(X \in \left[\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}\right)\right) = \epsilon$ . Das Ergebnis stimmt bis auf eine Konstante mit Gleichung (5.7) überein, so dass für dieses Beispiel der Exponent  $\frac{p}{p+1}$  aus Behauptung i) von Satz 5.5 optimal ist.

**Satz 5.7** Sei  $X$  die Lösung der SDGL (2.1),  $K \in \mathbb{R}$  und  $0 < p < \infty$ . Weiter habe  $X_T$  eine beschränkte Dichte und  $X_T^\delta$  sei eine Approximation von  $X_T$  mit maximaler Schrittweite  $\delta > 0$ , so dass

$$(E [|X_T - X_T^\delta|^p])^{1/p} \leq C_p |\delta|^\theta$$

für ein  $\theta > 0$  und eine Konstante  $C_p \geq 0$ . Dann ist für alle  $K \in \mathbb{R}$

$$E [|\chi_{[K,\infty)}(X_T) - \chi_{[K,\infty)}(X_T^\delta)|] \leq 3D_{X_T}(K)^{\frac{p}{p+1}} C_p^{\frac{p}{p+1}} |\delta|^{\frac{\theta p}{p+1}}.$$

**Beweis.** Folgt direkt aus Satz 5.5 i), indem  $E [|X_T - X_T^\delta|^p]$  durch  $C_p |\delta|^{p\theta}$  abgeschätzt wird. □

**Satz 5.8** Sei  $X_T^E$  die Euler-Approximation von  $X_T$  (vgl. (2.2)), dann existiert für jedes  $0 < \epsilon < 1/2$  eine Konstante  $C_\epsilon$ , so dass für alle  $K \in \mathbb{R}$  gilt

$$E [|\chi_{[K,\infty)}(X_T) - \chi_{[K,\infty)}(X_T^E)|] \leq \left(D_{X_T}(K) \vee \sqrt{D_{X_T}(K)}\right) C_\epsilon |\delta|^{\frac{1}{2}-\epsilon}.$$

**Beweis.** Da das Euler-Verfahren starke Ordnung  $\frac{1}{2}$  besitzt, gilt für Satz 5.7  $\theta = \frac{1}{2}$ . Sei  $1 \leq p < \infty$ , dann ist wegen  $D_{X_T}(K) > 0$  folgende Ungleichung erfüllt:  $D_{X_T}(K)^{\frac{p}{p+1}} \leq D_{X_T}(K) \vee \sqrt{D_{X_T}(K)}$  (dies zeigt man durch eine Fallunterscheidung: für  $D_{X_T}(K) \geq 1$  ist  $D_{X_T}(K)^{\frac{p}{p+1}} \leq D_{X_T}(K)$  und für  $0 < D_{X_T}(K) < 1$  ist  $D_{X_T}(K)^{\frac{p}{p+1}} \leq \sqrt{D_{X_T}(K)}$ ). Wird weiter  $p = \frac{\theta-\epsilon}{\epsilon} = \frac{\frac{1}{2}-\epsilon}{\epsilon} = \frac{1}{2\epsilon} - 1$  gesetzt, wobei  $0 < \epsilon < \theta$ , erhält man

$$\begin{aligned} E [|\chi_{[K,\infty)}(X_T) - \chi_{[K,\infty)}(X_T^\delta)|] &\leq 3D_{X_T}(K)^{\frac{p}{p+1}} C_p^{\frac{p}{p+1}} |\delta|^{\frac{p}{2(p+1)}} \\ &\leq 3 \left(D_{X_T}(K) \vee \sqrt{D_{X_T}(K)}\right) C_p^{\frac{\frac{1}{2}-\epsilon}{2\epsilon-1+1}} |\delta|^{\frac{\frac{1}{2}-\epsilon}{2(\frac{1}{2\epsilon}-1+1)}} \\ &\leq 3 \left(D_{X_T}(K) \vee \sqrt{D_{X_T}(K)}\right) C_p^{1-2\epsilon} |\delta|^{\frac{1}{2}-\epsilon} \\ &\leq \left(D_{X_T}(K) \vee \sqrt{D_{X_T}(K)}\right) C_\epsilon |\delta|^{\frac{1}{2}-\epsilon}, \end{aligned}$$

mit  $C_\epsilon = 3C_p^{1-2\epsilon}$ .

□

**Satz 5.9** Sei  $K \in \mathbb{R}$ . Dann existiert ein  $m \in (0, 1)$ , so dass für  $|\delta| < m$  gilt

$$E \left[ \left| \chi_{[K, \infty)}(X_T) - \chi_{[K, \infty)}(X_T^E) \right| \right] \leq \left( D_{X_T}(K) \vee \sqrt{D_{X_T}(K)} \right) |\delta|^{\frac{1}{2} - \frac{2+M}{(-\log|\delta|)^{1/3}}},$$

wobei die Konstante  $M = M(x_0, T, C_T) \in (0, \infty)$  aus [4], Satz A.1 genommen wurde.

**Beweis.** Aus Satz 5.7 mit  $\theta = \frac{1}{2}$  (starke Ordnung des Euler-Verfahrens) sowie der Eigenschaft  $a^{\frac{p}{p+1}} \leq a \vee \sqrt{a}$  für  $a > 0$  und  $p \geq 1$  folgt

$$\begin{aligned} E \left[ \left| \chi_{[K, \infty)}(X_T) - \chi_{[K, \infty)}(X_T^\delta) \right| \right] &\leq 3D_{X_T}(K)^{\frac{p}{p+1}} C_p^{\frac{p}{p+1}} |\delta|^{\frac{\theta p}{p+1}} \\ &\leq \left( D_{X_T}(K) \vee \sqrt{D_{X_T}(K)} \right) 3e^{Mp^2 \frac{p}{p+1}} |\delta|^{\frac{p}{2(p+1)}} \\ &\leq \left( D_{X_T}(K) \vee \sqrt{D_{X_T}(K)} \right) 3e^{Mp^2} |\delta|^{\frac{p}{2(p+1)}}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

wobei benutzt wurde, dass die Konstante  $C_p = e^{Mp^2}$  ist (vgl. [4], Satz A.1). Wähle jetzt  $p$ , so dass

$$4p(p+1)^2 = -\log|\delta| \quad (5.13)$$

für  $|\delta| \leq m$  mit  $m = e^{-16}$ , damit  $p \geq 1$  gilt. Deshalb ist  $p^3 \leq 4p(p+1)^2 = -\log|\delta|$  und weiter  $p^2 \leq (-\log|\delta|)^{2/3}$ . Es folgt, da die Exponentialfunktion monoton steigend ist

$$e^{Mp^2} \leq e^{M(-\log|\delta|)^{2/3}} = e^{(-\log|\delta|)M(-\log|\delta|)^{-1/3}} = |\delta|^{-M(-\log|\delta|)^{-1/3}} \quad (5.14)$$

und

$$\frac{1}{2(p+1)} \stackrel{(5.13)}{=} \sqrt{\frac{p}{-\log|\delta|}} \leq \sqrt{p^{-2}} \leq \sqrt{(-\log|\delta|)^{-2/3}} = (-\log|\delta|)^{-1/3}. \quad (5.15)$$

Aus den letzten beiden Ungleichungen folgt

$$\begin{aligned} 3e^{Mp^2} |\delta|^{\frac{p}{2(p+1)}} &\stackrel{(5.14)}{\leq} 3|\delta|^{-M(-\log|\delta|)^{-1/3}} |\delta|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2(p+1)}} \\ &\stackrel{(5.15)}{\leq} 3|\delta|^{-M(-\log|\delta|)^{-1/3}} |\delta|^{\frac{1}{2} - (-\log|\delta|)^{-1/3}} \\ &\leq 3|\delta|^{\frac{1}{2} - \frac{1+M}{(-\log|\delta|)^{1/3}}} \\ &\leq |\delta|^{\frac{1}{2} - \frac{2+M}{(-\log|\delta|)^{1/3}}}, \end{aligned}$$



wobei der letzte Schritt wegen  $3|\delta|^{\frac{1}{(-\log|\delta|)^{1/3}}} \leq 1$  gilt für  $|\delta| < m = e^{-16}$ .  
Dies in (5.12) eingesetzt, ergibt

$$E [|\chi_{[K,\infty)}(X_T) - \chi_{[K,\infty)}(X_T^E)|] \leq \left( D_{X_T}(K) \vee \sqrt{D_{X_T}(K)} \right) |\delta|^{\frac{1}{2} - \frac{2+M}{(-\log|\delta|)^{1/3}}}.$$

□

**Bemerkung 5.10** *Betrachtet man in Satz 5.9 die  $p$ -ten Momente, so ändert sich an der Konvergenzordnung nichts, da*

$$|\chi_{[K,\infty)}(X_T) - \chi_{[K,\infty)}(X_T^\delta)| = |\chi_{[K,\infty)}(X_T) - \chi_{[K,\infty)}(X_T^\delta)|^p$$

für beliebige  $p > 0$ . Sind also die Voraussetzungen aus Satz 5.9 erfüllt, dann gilt

$$E [|\chi_{[K,\infty)}(X_T) - \chi_{[K,\infty)}(X_T^E)|^p] \leq \left( D_{X_T}(K) \vee \sqrt{D_{X_T}(K)} \right) |\delta|^{\frac{1}{2} - \frac{2+M}{(-\log|\delta|)^{1/3}}}. \quad (5.16)$$

## 5.2 Stochastische Koeffizienten

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie die starke Ordnung des Euler-Verfahrens zur SDGL

$$dX_t = a(\omega, t, X_t)dt + b(\omega, t, X_t)dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.17)$$

bestimmt werden kann (vgl. [3], Theorem A). Dazu sei  $(\Omega, F, \mathbb{P})$  wieder ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Filtration  $F$  und für die Funktionen  $a(\omega, t, x) : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $b(\omega, t, x) : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  gelten die folgenden Bedingungen:

### Definition 5.11

1. Für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$  und  $\omega \in \Omega$  ist  $a(\omega, \cdot, x)$  eine stetige Funktion in  $t$  und es existiert ein  $C(\omega)$ , so dass

$$|a(\omega, t, x) - a(\omega, s, x)| \leq C(\omega)(1 + |x|)\sqrt{t - s}$$

und für jedes  $p \geq 2$  ist  $E[(C(\omega))^p] = C_1 < \infty$ .

2. Für jedes feste  $x$  ist  $a(\cdot, \cdot, x)$  ein  $F_t$ -adaptierter Prozess (vgl. [12], Definition 9.10).

3. Für jedes fest  $t$  und  $\omega \in \Omega$  ist  $a(\omega, t, \cdot)$  stetig differenzierbar und

$$|a(\omega, t, x) - a(\omega, t, y)| \leq C|x - y|,$$

wobei die Konstante  $C$  unabhängig von  $t$  und  $\omega$  ist.

Die gleichen Bedingungen werden auch für  $b$  angenommen.

Später wird noch diese Folgerung aus Bedingung 3 benötigt:

$$|a(\omega, t, x)| \leq |a(\omega, t, x) - a(\omega, t, 0)| + |a(\omega, t, 0)| \leq C|x| + |a(\omega, t, 0)| \leq C_a(|x| + 1), \quad (5.18)$$

da  $a(\omega, t, 0)$  beschränkt ist und  $C_a = \max(C, |a(\omega, t, 0)|)$ .

Die SDGL (5.17) lässt sich wie folgt als Integralgleichung schreiben

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(\omega, s, X_s) ds + \int_0^t b(\omega, s, X_s) dW_s, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.19)$$

für gegebenes  $X_0 \in \mathbb{R}$ . Für eine Partition  $\pi : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ , wobei  $\delta = \max_{0 \leq k \leq n-1} |t_{k+1} - t_k|$  lautet das Euler-Verfahren

$$\widehat{X}_t = \widehat{X}_{t_k} + a(\omega, t_k, \widehat{X}_{t_k})(t - t_k) + b(\omega, t_k, \widehat{X}_{t_k})(W_t - W_{t_k}), \quad (5.20)$$

mit  $t_k < t \leq t_{k+1}$  und  $\widehat{X}_0 = X_0$ . Es gilt der folgende Satz:

**Satz 5.12** *Genügen  $a$  und  $b$  aus (5.17) den Bedingungen (1.-3.) aus Definition 5.11 und  $E[|X_t|^p] < \infty$  für alle  $0 \leq t \leq T$ , dann existiert eine von  $\delta$  unabhängige Konstante  $C \in (0, \infty)$ , so dass*

$$E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - \widehat{X}_t|^p \right] \leq C\delta^{p/2}. \quad (5.21)$$

**Beweis.** Zu Beginn benutzt man die Abschätzung

$$\begin{aligned} |a(\omega, t, X_t) - a(\omega, s, X_s)| &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a(\omega, t, X_t) - a(\omega, t, X_s)| \\ &\quad + |a(\omega, t, X_s) - a(\omega, s, X_s)| \\ &\stackrel{\text{Bed. (1.) und (3.)}}{\leq} C|X_t - X_s| + C(\omega)(1 + |X_s|)|t - s|^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

für  $s, t \in [0, T]$ , um den folgenden Erwartungswert abzuschätzen

$$E[|a(\omega, t, X_t) - a(\omega, s, X_s)|^p] \leq E \left[ \left( C|X_t - X_s| + C(\omega)(1 + |X_s|)|t - s|^{\frac{1}{2}} \right)^p \right]$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2^{p-1} E \left[ (C |X_t - X_s|)^p + \left( C(\omega)(1 + |X_s|) |t - s|^{\frac{1}{2}} \right)^p \right] \\
&\stackrel{(*)}{\leq} 2^{p-1} \left( C^p E [|X_t - X_s|^p] + E \left[ \left( C(\omega)(1 + |X_s|) |t - s|^{\frac{1}{2}} \right)^p \right] \right) \\
&\leq C_5 |t - s|^{\frac{p}{2}}. \tag{5.22}
\end{aligned}$$

Dies erreicht man, indem in (\*) die beiden Summanden auf folgende Weise abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
E [|X_t - X_s|^p] &= E \left[ \left| \int_s^t a(\omega, u, X_u) du + \int_s^t b(\omega, u, X_u) dW_u \right|^p \right] \\
&\leq 2^{p-1} \left\{ E \left[ \left| \int_s^t a(\omega, u, X_u) du \right|^p \right] + E \left[ \left| \int_s^t b(\omega, u, X_u) dW_u \right|^p \right] \right\} \\
&\stackrel{(*)}{\leq} 2^{p-1} \left\{ (t-s)^{p-1} \int_s^t E [|a(\omega, u, X_u)|^p] du \right. \\
&\quad \left. + C_{Burk} E \left[ \int_s^t |b(\omega, u, X_u)|^2 du \right]^{p/2} \right\} \\
&\stackrel{(**)}{\leq} 2^{p-1} C_1 (t-s)^p + 2^{p-1} C_{Burk} (t-s)^{\frac{p}{2}-1} \int_s^t E [|b(\omega, u, X_u)|^p] du \\
&\stackrel{T \geq t-s}{\leq} 2^{p-1} C_1 T^{p/2} (t-s)^{p/2} + 2^{p-1} C_{Burk} C_2 (t-s)^{p/2} \\
&\leq C_3 (t-s)^{p/2} \tag{5.23}
\end{aligned}$$

aufgrund der Hölderungleichung für Integrale, Fubini (Vertauschung von Erwartungswert und Integral) und der Burkholder-Davis-Gundy Ungleichung ([11], Theorem 3.28) in (\*) für die Konstante  $C_3 = 2^{p-1} C_1 T^{p/2} + 2^{p-1} C_{Burk} C_2$ . Schritt (\*\*) gilt wegen  $|a(\omega, u, X_u)|^p \stackrel{5.18}{\leq} (C_a(|X_u| + 1))^p \stackrel{\text{Vor.}}{\leq} C_1$ . Die Umformung für  $b$  geht analog. Für den zweiten Summanden gilt

$$\begin{aligned}
E \left[ \left( C(\omega)(1 + |X_s|) |t - s|^{\frac{1}{2}} \right)^p \right] &\leq |t - s|^{\frac{p}{2}} E [(C(\omega))^p] E [(1 + |X_s|)^p] \\
&\leq C_4 |t - s|^{\frac{p}{2}}, \tag{5.24}
\end{aligned}$$

da  $E [|X_s|^p]$  und  $E [(C(\omega))^p]$  beschränkt und die Zufallsvariablen unabhängig sind, so dass  $C_4 = E [(C(\omega))^p] E [(1 + |X_s|)^p]$ . Somit ist Ungleichung (5.22) gezeigt, wobei die Konstante  $C_5 = 2^{p-1}(C_3 + C_4)$  unabhängig von  $\delta$  ist.

Weiter folgt für den Approximationsfehler, indem (5.20) umgeschrieben wird zu

$$\widehat{X}_s = \widehat{X}_0 + \sum_{k=0}^i \left\{ a(\omega, t_k, \widehat{X}_{t_k})(t_{k+1} - t_k) + b(\omega, t_k, \widehat{X}_{t_k})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \right\},$$

wobei  $t_i < s \leq t_{i+1}$ , dass mit der Schreibweise  $t_u^* := \max_{i=0,1,\dots} \{t_i : t_i \leq u\}$  und Gleichung (5.19)

$$\begin{aligned} X_s - \widehat{X}_s &= X_0 + \int_0^s a(\omega, u, X_u) du + \int_0^s b(\omega, u, X_u) dW_u \\ &\quad - \widehat{X}_0 - \sum_{k=0}^i \left\{ a(\omega, t_k, \widehat{X}_{t_k})(t_{k+1} - t_k) + b(\omega, t_k, \widehat{X}_{t_k})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \right\} \\ &\stackrel{X_0 = \widehat{X}_0}{=} \int_0^s \left\{ a(\omega, u, X_u) - \sum_{k=0}^i a(\omega, t_k, \widehat{X}_{t_k}) \mathbf{1}_{t_k < u \leq t_{k+1}} \right\} du \\ &\quad + \int_0^s \left\{ b(\omega, u, X_u) - \sum_{k=0}^i b(\omega, t_k, \widehat{X}_{t_k}) \mathbf{1}_{t_k < u \leq t_{k+1}} \right\} dW_u \\ &= \int_0^s \left\{ a(\omega, u, X_u) - a(\omega, t_u^*, \widehat{X}_{t_u^*}) \right\} du \\ &\quad + \int_0^s \left\{ b(\omega, u, X_u) - b(\omega, t_u^*, \widehat{X}_{t_u^*}) \right\} dW_u \\ &= \int_0^s \{R_u^1 + R_u^2\} du + \int_0^s \{R_u^3 + R_u^4\} dW_u \end{aligned} \tag{5.25}$$

und  $R_u^1 = a(\omega, t_u^*, X_{t_u^*}) - a(\omega, t_u^*, \widehat{X}_{t_u^*})$ ,  $R_u^2 = a(\omega, u, X_u) - a(\omega, t_u^*, X_{t_u^*})$ ,  $R_u^3 = b(\omega, t_u^*, X_{t_u^*}) - b(\omega, t_u^*, \widehat{X}_{t_u^*})$  sowie  $R_u^4 = b(\omega, u, X_u) - b(\omega, t_u^*, X_{t_u^*})$ .

Deshalb ist

$$\begin{aligned} Z_t &:= E \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s - \widehat{X}_s|^p \right] \\ &= E \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s \{R_u^1 + R_u^2\} du + \int_0^s \{R_u^3 + R_u^4\} dW_u \right|^p \right] \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} 4^{p-1} E \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} \left\{ \left| \int_0^s R_u^1 du \right|^p + \left| \int_0^s R_u^2 du \right|^p + \left| \int_0^s R_u^3 dW_u \right|^p + \left| \int_0^s R_u^4 dW_u \right|^p \right\} \right] \\ &\stackrel{(*)}{\leq} 4^{p-1} \left\{ \sum_{i=1}^2 E \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s R_u^i du \right|^p \right] + \sum_{i=3}^4 E \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s R_u^i dW_u \right|^p \right] \right\} \end{aligned}$$

$$=: C_p \sum_{i=1}^4 I_i, \quad (5.26)$$

mit  $C_p = 4^{p-1}$ . In (\*) wurde die Linearität des Erwartungswert und die Eigenschaft  $\sup_{0 \leq s \leq t} (f(s) + g(s)) \leq \sup_{0 \leq s \leq t} f(s) + \sup_{0 \leq s \leq t} g(s)$  benutzt, wobei  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Weiter werden nun die Summanden einzeln abgeschätzt:

$$\begin{aligned} I_1 &= E \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s R_u^1 du \right|^p \right] \\ &\leq E \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} \left( \int_0^s |R_u^1| du \right)^p \right] \\ &= E \left[ \left( \int_0^t |R_u^1| du \right)^p \right] \\ &\leq t^{p-1} \int_0^t E [ |R_u^1|^p ] du \\ &\leq C_{t,p} \int_0^t Z_u du, \end{aligned} \quad (5.27)$$

unter Benutzung der Hölderschen-Ungleichung für Integrale und Fubini in der vorletzten Ungleichung für  $C_{t,p} = t^{p-1}$ .

Für den zweiten Summanden gilt mit  $n_t \in \mathbb{N}$ , so dass  $t_{n_t} \leq t < t_{n_t+1}$ ,

$$\begin{aligned} I_2 &= E \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s R_u^2 du \right|^p \right] \\ &\leq C_{t,p} \int_0^t E [ |R_u^2|^p ] du \\ &\stackrel{(5.22)}{\leq} C_{t,p} \int_0^t C_2 |u - t_u^*|^{p/2} du \\ &\leq C_{t,p} C_2 \left\{ \sum_{k=0}^{n_t-1} \left( \int_{t_k}^{t_{k+1}} (u - t_u^*)^{p/2} du \right) + \int_{t_{n_t}}^t (u - t_{n_t})^{p/2} du \right\} \\ &\leq C_{t,p} C_2 \left\{ \sum_{k=0}^{n_t} (t_{k+1} - t_k) \max_{u \in (t_k, t_{k+1}]} (u - t_k)^{p/2} \right\} \\ &\leq C_{t,p} C_2 (n_t + 1) T \delta^{p/2} \\ &= C_{t,p,n_t,T} \delta^{p/2}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

wobei die Umformung im ersten Schritt analog zu der von Gleichung  $I_1$  geht und  $C_{t,p,n_t} = C_{t,p} C_2 (n_t + 1) T$ .

Außerdem ist

$$\begin{aligned}
I_3 &= E \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s R_u^3 dW_u \right|^p \right] \\
&\leq C_{Burk} E \left[ \left( \int_0^t |R_u^3|^2 du \right)^{\frac{p}{2}} \right] \\
&\leq C_{Burk} t^{\frac{p}{2}-1} \int_0^t E [|R_u^3|^p] du \\
&\leq C_{P,t} \int_0^t Z_u du
\end{aligned} \tag{5.29}$$

für  $C_{P,t} = C_{Burk} t^{\frac{p}{2}-1}$ . Die erste Ungleichung folgt aus der Burkholder-Davis-Gundy Ungleichung und danach wird erneut Hölder und Fubini benutzt.

Um den letzten Summanden abzuschätzen, kombiniert man die Rechnungen vom dritten und zweiten Summanden.

$$\begin{aligned}
I_4 &= E \left[ \sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s R_u^4 dW_u \right|^p \right] \\
&\leq C_{P,t} \int_0^t E [|R_u^4|^p] du \\
&\leq C_{P,t} (n_t + 1) T \delta^{p/2} \\
&= C_{t,P,n_t,T} \delta^{p/2}
\end{aligned} \tag{5.30}$$

für  $C_{t,P,n_t} = C_{P,t} (n_t + 1) T$ .

Die einzelnen Summanden aufaddiert und darauf die Gronwall-Ungleichung (vgl. [12], Lemma 26.9) angewendet, ergibt für eine von  $\delta$  unabhängige Konstante  $C$  das gewünschte Ergebnis ( $C$  ändert sich zwischen den Rechenschritten)

$$\begin{aligned}
Z_t &\leq C \int_0^t Z_u du + C \delta^{p/2} \\
\Rightarrow Z_t &\leq C \delta^{p/2} + \int_0^t C \delta^{p/2} C e^{\int_u^t C ds} du \\
&\leq C \delta^{p/2} + C^2 \delta^{p/2} \int_0^t e^{(t-u)C} du \\
&\leq C \delta^{p/2}.
\end{aligned} \tag{5.31}$$

□

# Kapitel 6

## MLMC für Greeks

In diesem Kapitel geht es um die Anwendung des MLMC Algorithmus auf die sogenannten Greeks. Dazu wird zu Beginn beschrieben, was man unter den Greeks versteht. Im zweiten Abschnitt wird die Methode des pfadweisen Schätzens der Ableitung eingeführt und anhand von Beispielen deutlich gemacht. Im vierten Abschnitt werden die Bedingungen geklärt unter denen die pfadweise Methode angewandt werden darf. Der vorletzte Abschnitt beschäftigt sich dann konkret mit dem pfadweisen Schätzen des Deltas einer europäischen Version (vgl. [8], S.386-397), woraufhin zum Schluss mit Satz 6.3 schon die ersten Voraussetzungen für das Anwenden des Komplexitätstheorems auf das neue Problem geklärt werden.

### 6.1 Greeks

In der Finanzwelt möchte man oft wissen, wie sensitiv sich ein entwickeltes Produkt bezüglich seiner Variablen verhält. Mathematisch betrachtet, wird diese Sensitivität durch die Ableitung des Produkts nach der gewünschten Variablen bestimmt und durch einen griechischen Buchstaben bezeichnet (deshalb Greeks). Ein Beispiel dafür wäre die Sensitivität einer europäischen Option bezüglich des unterliegenden Aktienkurses, die Delta genannt wird. Benötigt werden die Greeks, um sich gegen bestimmte Risiken abzusichern (zu hedgen). Im Beispiel des Deltahedges sichert sich der Verkäufer der europäischen Option gegen eine Steigerung des Aktienkurses ab, indem er die Anzahl von Delta Aktien kauft (vgl. [10], Kapitel 15.4).

Anhand der europäischen Option wird deutlich, welche Sensitivitäten in der Regel eine Rolle spielen. Der Optionspreis  $p$  hängt von den Variablen  $S_0$  (Startpreis),  $K$  (Strike),

$T$  (Restlaufzeit),  $r$  (Zins) und  $\sigma$  (Volatilität) ab. Die Greeks dazu lauten:

$$\begin{aligned}\Delta &:= \frac{dp}{dS_0} && \text{Delta} \\ \Gamma &:= \frac{d^2p}{dS_0^2} && \text{Gamma} \\ \Theta &:= \frac{dp}{dT} && \text{Theta} \\ \Lambda &:= \frac{dp}{d\sigma} && \text{Lambda.}\end{aligned}$$

Die Ableitungen nach  $K$  und  $r$  werden nicht betrachtet, da diese beiden Variablen in der Regel als konstant angenommen werden.

## 6.2 Pfadweises Schätzen der Ableitung

In diesem Abschnitt wird zuerst allgemein beschrieben, wie die Ableitung einer Zufallsvariablen nach einem bestimmten Parameter bestimmt werden kann. Danach wird diese Methodik auf das Beispiel der Greeks übertragen.

Sei dafür  $(\Omega, F, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $\{Y(\theta), \theta \in I\}$  eine Menge von Zufallsvariablen, wobei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall ist. Hält man  $\omega \in \Omega$  fest, dann ist die Abbildung  $\theta \rightarrow Y(\theta, \omega)$  eine Funktion auf  $I$  und  $Y'(\theta) = Y'(\theta, \omega)$  kann als die Ableitung dieser Funktion bezüglich  $\theta$  bei festem  $\omega$  interpretiert werden. Angenommen, die Ableitung existiert mit Wahrscheinlichkeit 1, so lässt sich die pfadweise Ableitung von  $Y$  im Punkt  $\theta$  schreiben als

$$Y'(\theta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Y(\theta + h) - Y(\theta)}{h}. \quad (6.1)$$

Definiert man sich den Erwartungswert von  $Y$  als  $\alpha(\theta) := E[Y(\theta)]$ , dann folgt für die Ableitung

$$\alpha'(\theta) := \frac{d}{d\theta} E[Y(\theta)] = E \left[ \frac{d}{d\theta} Y(\theta) \right], \quad (6.2)$$

falls das Vertauschen von Erwartungswert und Ableitung erlaubt ist.

Auf die MLMC Methode bezogen, entspricht  $Y$  dem Gesamtschätzer und  $\theta$  einem Inputparameter, so dass das Bilden des Erwartungswertes nicht mehr notwendig ist. Will man jedoch MLMC und die pfadweise Methode verbinden, spielt es sehr wohl eine Rolle, wann die pfadweise Ableitung von  $Y(\theta)$  existiert und ob das Vertauschen von Ableitung und Erwartungswert möglich ist. Die folgenden Beispiele verdeutlichen, dass



typischerweise die pfadweise Ableitung  $Y'(\theta)$  in jedem  $\theta \in I$  mit Wahrscheinlichkeit 1 existiert, aber deshalb die Abbildung  $\theta \rightarrow Y(\theta)$  nicht differenzierbar auf  $I$  sein muss.

## 6.3 Beispiele

In den folgenden Unterabschnitten werden Beispiele für bestimmte Greeks bezüglich unterschiedlicher Optionen gezeigt. Der Aktienkurs soll weiterhin durch eine geometrisch Brownsche Bewegung dargestellt werden, so dass

$$S(T) = S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}Z}, \quad Z \sim N(0,1), \quad (6.3)$$

gilt (vgl. Bsp. 2.4) und  $S(0)$ ,  $r$ ,  $\sigma$ ,  $T$  sowie  $K$  positive Konstanten sind.

### 6.3.1 Black-Scholes Delta

Gesucht ist das Delta einer europäischen Call-Option. Da mit der Black-Scholes Formel eine explizite Formel für den Preis dieser Option existiert, könnte man einfach diese Formel nach  $S(0)$  ableiten, um das Delta zu bestimmen. Doch in diesem Abschnitt soll der Weg mittels Simulation gezeigt werden.

Der abgezinste Payoff dieser Option bestimmt sich durch

$$Y = e^{-rT}[S(T) - K]^+.$$

Mit der Kettenregel folgt

$$\frac{dY}{dS(0)} = \frac{dY}{dS(T)} \frac{dS(T)}{dS(0)}. \quad (6.4)$$

Um den ersten Faktor zu bestimmen, benutzt man

$$\frac{d}{dx} \max(0, x - K) = \begin{cases} 0, & x < K \\ 1, & x > K, \end{cases}$$

wobei die Ableitung im Punkt  $S(T) = K$  nicht existiert. Da jedoch das Ereignis  $\{S(T) = K\}$  Wahrscheinlichkeit 0 besitzt, ist  $Y$  fast sicher differenzierbar bezüglich

$S(T)$  mit der Ableitung

$$\frac{dY}{dS(T)} = e^{-rT} \mathbf{1} \{S(T) > K\}.$$

Für den zweiten Faktor gilt  $\frac{dS(T)}{dS(0)} = \frac{S(T)}{S(0)}$ , da zwischen  $S(T)$  und  $S(0)$  ein linearer Zusammenhang herrscht. Der pfadweise Schätzer des Deltas ist also

$$\frac{dY}{dS(0)} = e^{-rT} \frac{S(T)}{S(0)} \mathbf{1} \{S(T) > K\} \quad (6.5)$$

und wird durch Simulation von  $S(T)$  geschätzt. Der Erwartungswert dieses Schätzers entspricht tatsächlich dem Black-Scholes Delta, so dass der Schätzer erwartungstreu ist.

### 6.3.2 Pfadabhängiges Delta

Als Beispiel für ein pfadabhängiges Delta wird die asiatische Option benutzt. Der abgezinste Payoff ist

$$Y = e^{-rT} [\bar{S} - K]^+, \quad \bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S(t_i),$$

für feste Zeitpunkte  $0 < t_1 < \dots < t_m \leq T$ . Für den pfadweisen Schätzer folgt mit den gleichen Argumenten wie im vorherigen Beispiel

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dS(0)} &= \frac{dY}{d\bar{S}} \frac{d\bar{S}}{dS(0)} \\ &= e^{-rT} \mathbf{1} \{\bar{S} > K\} \frac{d\bar{S}}{dS(0)} \\ &= e^{-rT} \mathbf{1} \{\bar{S} > K\} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{dS(t_i)}{dS(0)} \\ &= e^{-rT} \mathbf{1} \{\bar{S} > K\} \frac{\bar{S}}{S(0)}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Da die Bedingungen aus dem noch folgenden Satz 6.1 erfüllt sind, ist auch dieser Schätzer erwartungstreu.

### 6.3.3 Digitale Option und Gamma

Die digitale Option hat den abgezinste Payoff

$$Y = e^{-rT} \mathbf{1} \{S(T) > K\}.$$

Bezüglich  $S(T)$  ist  $Y$  überall differenzierbar, außer in  $S(T) = K$ . Dies impliziert, dass sie mit Wahrscheinlichkeit 1 überall differenzierbar ist. Da jedoch  $Y$  eine stückweise konstante Funktion ist, gilt  $\frac{dY}{dS(T)} = 0$  und somit auch  $\frac{dY}{dS(0)} = 0$ . Somit gilt

$$0 = E \left[ \frac{dY}{dS(0)} \right] \neq \frac{d}{dS(0)} E[Y]$$

und damit ist der Schätzer nicht erwartungstreu, so dass die Methode des pfadweisen Schätzens für diesen Optionstyp keinen Sinn macht. Weiter kann man schlussfolgern, dass prinzipiell das pfadweise Schätzen von Gamma nicht möglich ist. Dies liegt daran, dass das Delta der meisten Optionen von einer ähnlichen Form ist wie der Payoff der digitalen Option.

## 6.4 Bedingungen für Erwartungstreue

Im letzten Beispiel wurde deutlich, dass die pfadweise Methode bei unstetigen Payoffs nicht benutzt werden kann. Es werden nun Voraussetzungen beschrieben, unter denen Gleichung (6.2) und somit Erwartungstreue gilt. Dafür sollen die gleichen Annahmen gelten wie in Abschnitt 6.2. Außerdem wird vorausgesetzt, dass die Ableitung  $Y'(\theta)$  für jedes  $\theta \in I$  mit Wahrscheinlichkeit 1 existiert.

Wegen Gleichung (6.1) stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen die folgende Gleichung gilt

$$E \left[ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Y(\theta + h) - Y(\theta)}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} E \left[ \frac{Y(\theta + h) - Y(\theta)}{h} \right]. \quad (6.7)$$

Es dreht sich also um das Problem, wann die Vertauschung von Grenzwert und Erwartungswert gestattet ist.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist gleichmäßige Integrierbarkeit und stochastische Konvergenz des Differenzenquotienten  $h^{-1}[Y(\theta + h) - Y(\theta)]$  (vgl. [18], Definition 3.10, Proposition 3.11), jedoch werden Voraussetzungen gesucht, die man in der Praxis leicht verifizieren kann.

Dies erreicht man mit Hilfe der Gleichung  $\frac{dY}{d\theta} = \frac{dY}{dS(T)} \frac{dS(T)}{d\theta}$ , indem nun Bedingungen an die beiden Faktoren gestellt werden. Da der Wert der Optionen von endlich vielen festen Zeitpunkten des unterliegenden Assets abhängen kann, wird ein Vektor

$X(\theta) = (X_1(\theta), \dots, X_m(\theta))$  als Funktion des Parameters  $\theta$  eingeführt, so dass

$$Y(\theta) = f(S_1(\theta), \dots, S_m(\theta)), \quad (6.8)$$

für eine Funktion  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ . Natürlich ließe sich dieser Rahmen auch für Optionen auf mehrere Assets anwenden, deren Underlying von einem Zeitpunkt abhängt.

**Satz 6.1** *Unter folgenden Bedingungen gilt Gleichung (6.2) bzw. Erwartungstreue:*

1. Zu jedem  $\theta \in I$  existiert  $S'_i(\theta)$  mit Wahrscheinlichkeit 1 für alle  $i = 1, \dots, m$ .
2.  $\mathbb{P}(S(\theta) \in D_f) = 1$  für alle  $\theta \in I$ , wobei  $D_f \subseteq \mathbb{R}$  die Punkte beinhaltet, in denen  $f$  differenzierbar ist.
3.  $f$  ist Lipschitz, das heißt es existiert eine Konstante  $k_f$ , so dass für alle  $x, y \in \mathbb{R}^m$

$$|f(x) - f(y)| \leq k_f \|x - y\|.$$

4. Es existieren Zufallsvariablen  $\kappa_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , so dass für alle  $\theta_1, \theta_2 \in I$

$$|S_i(\theta_2) - S_i(\theta_1)| \leq \kappa_i |\theta_2 - \theta_1|$$

und  $E[\kappa_i] < \infty$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

**Beweis.** Aus den Bedingungen 1 und 2 folgt, dass  $Y'(\theta)$  mit Wahrscheinlichkeit 1 existiert und sich aufgrund von Gleichung (6.8) unter Benutzung der Kettenregel schreiben lässt als

$$Y'(\theta) = \sum_{i=1}^m \frac{df}{dS_i}(S(\theta)) S'_i(\theta). \quad (6.9)$$

Im Vergleich der Beispiele aus Kapitel 6.3.1 und 6.3.3 hat man jedoch gesehen, dass dies nicht genügt. Deshalb wird mehr als nur Stetigkeit gefordert.

Bedingungen 3 und 4 implizieren fast sichere Lipschitz-Stetigkeit von  $Y$  in  $\theta$ , da

$$\begin{aligned} |Y(\theta_2) - Y(\theta_1)| &= |f(S(\theta_2)) - f(S(\theta_1))| \\ &\leq k_f \|S(\theta_2) - S(\theta_1)\| \\ &\stackrel{(*)}{\leq} k_f \sum_{i=1}^m |S_i(\theta_2) - S_i(\theta_1)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq k_f \sum_{i=1}^m \kappa_i |\theta_2 - \theta_1| \\
&\leq \kappa_Y |\theta_2 - \theta_1|
\end{aligned} \tag{6.10}$$

für  $\kappa_Y = k_f \sum_{i=1}^m \kappa_i$ . Bei (\*) wurde die Betragssummennorm (1-Norm) verwendet, da  $\|x\|_1 \geq \|x\|_p$  für  $x \in \mathbb{R}^m$  und  $p \in \mathbb{N}$ . Außerdem ist sofort klar, dass  $E[\kappa_Y] = k_f \sum_{i=1}^m E[\kappa_i] < \infty$ . Gleichung (6.10) umgestellt, ergibt für  $\theta_1 = \theta$  und  $\theta_2 = \theta + h$

$$\left| \frac{Y(\theta + h) - Y(\theta)}{h} \right| \leq \kappa_Y, \tag{6.11}$$

woraufhin der Satz von der majorisierten Konvergenz angewendet werden kann (vgl. [12], Korollar 6.26), da die Folge  $\left\{ \frac{Y(\theta + \frac{1}{n}) - Y(\theta)}{\frac{1}{n}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  absolut beschränkt ist. Damit folgt, dass der Grenzwert für  $h \rightarrow 0$  und der Erwartungswert vertauscht werden können sowie  $\frac{d}{d\theta} E[Y(\theta)]$  existiert. Somit gilt  $\frac{d}{d\theta} E[Y(\theta)] = E[Y'(\theta)]$ .

□

Fordert man in Bedingung 4, dass  $E[\kappa_i^2] < \infty$ , so ist  $E[\kappa_Y^2] < \infty$ , woraufhin mit (6.11) folgt, dass

$$E[(Y(\theta + h) - Y(\theta))^2] \leq E[\kappa_Y^2] h^2$$

und ebenfalls wegen (6.10) sowie  $h > 0$

$$E[Y(\theta + h) - Y(\theta)] \leq E[|Y(\theta + h) - Y(\theta)|] \leq E[\kappa_Y] h.$$

Deshalb gilt

$$\begin{aligned}
\text{Var}[Y(\theta + h) - Y(\theta)] &= E[(Y(\theta + h) - Y(\theta))^2] - (E[Y(\theta + h) - Y(\theta)])^2 \\
&\leq E[\kappa_Y^2] h^2 - (E[\kappa_Y])^2 h^2 \\
&= (E[\kappa_Y^2] - (E[\kappa_Y])^2) h^2,
\end{aligned}$$

also ist

$$\text{Var}[Y(\theta + h) - Y(\theta)] = O(h^2). \tag{6.12}$$

Wird umgekehrt vorausgesetzt, dass Gleichung (6.12) gilt und  $Y'(\theta)$  mit Wahrscheinlichkeit 1 existiert sowie  $E[Y(\theta)]$  differenzierbar ist, dann folgt

$$E[(Y(\theta + h) - Y(\theta))^2] = \text{Var}[Y(\theta + h) - Y(\theta)] + (E[Y(\theta + h) - Y(\theta)])^2 = O(h^2)$$

wegen

$$\begin{aligned}
 E[Y(\theta + h) - Y(\theta)] &= E \left[ h \int_0^1 Y'((1-x)t + x(t+h)) dx \right] \\
 &\stackrel{\text{maj. Konvergenz}}{=} h \left\{ \int_0^1 E[Y'((1-x)t + x(t+h))] dx \right\} \\
 &= O(h),
 \end{aligned}$$

da  $E[Y'((1-x)t + x(t+h))] < \infty$ .

Deshalb ist  $E \left[ \left( \frac{Y(\theta+h) - Y(\theta)}{h} \right)^2 \right]$  für  $h \rightarrow 0$  beschränkt und  $\left[ \frac{Y(\theta+h) - Y(\theta)}{h} \right]$  ist gleichmäßig integrierbar. In diesem Fall wäre also auch Ableitung und Erwartungswert in (6.2) vertauschbar.

In der Praxis macht vor allem Bedingung 3 Probleme, da es einige Optionen gibt, deren Payofffunktion nicht stetig bezüglich des Parameters  $\theta$  ist, beispielsweise im Fall von  $\theta = S(0)$  für eine digitale Option. Bedingung 4 ist automatisch erfüllt, sobald der Aktienkurs durch eine geometrisch Brownsche Bewegung dargestellt wird, da  $S(\theta)$  bezüglich aller Parameter Lipschitz ist. Dies lässt sich mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentiation zeigen, da  $S(\theta)$  stetig und differenzierbar ist. Die Bedingungen 1 und 2 stellen in der Regel keine Probleme dar, weil im Falle einer geometrisch Brownschen Bewegung  $S(\theta)$  stets differenzierbar in allen Parametern ist und die meisten Optionspayofffunktionen höchstens in endlich vielen Punkten unstetig sind, so dass sie mit Wahrscheinlichkeit 1 differenzierbar sind.

## 6.5 Approximation des Deltas

Es ergibt sich nun die Fragestellung, wie die Methode der pfadweisen Ableitung für den Prozess (6.13) bei Simulation mittels des Euler-Verfahrens (6.14), funktioniert.

Zur Wiederholung: die stochastische Differentialgleichung

$$dS_t = a(S_t, t)dt + b(S_t, t)dW(t) \quad (6.13)$$

soll also mittels des Euler-Verfahrens auf folgende Weise simuliert werden

$$\widehat{S}_{n+1} = \widehat{S}_n + a(\widehat{S}_n, t_n)h + b(\widehat{S}_n, t_n)\sqrt{h}Z_{n+1}, \quad \widehat{S}_0 = S_0, \quad (6.14)$$

wobei  $Z_n \sim N(0, 1)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $h$  die Zeitschrittweite ist (vgl. Kapitel 2.1).

Sei

$$\widehat{\Delta}_n = \frac{d\widehat{S}_n}{dS_0}, \quad (6.15)$$

also das Delta des simulierten Pfades. Durch Differenzieren beider Seiten von (6.14) nach  $S_0$  erhält man die Rekursionsformel

$$\widehat{\Delta}_{n+1} = \widehat{\Delta}_n + a'_S(\widehat{S}_n, t_n)\widehat{\Delta}_n h + b'_S(\widehat{S}_n, t_n)\widehat{\Delta}_n \sqrt{h}Z_{n+1}, \quad \widehat{\Delta}_0 = 1, \quad (6.16)$$

wobei mit  $a'_S(\widehat{S}_n, t_n) = \frac{d}{dS_n}a(\widehat{S}_n, t_n)$  und  $b'_S(\widehat{S}_n, t_n) = \frac{d}{dS_n}b(\widehat{S}_n, t_n)$  die Ableitungen nach  $S_n$  gemeint sind und diese natürlich auch existieren müssen. Welche speziellen Anforderungen noch an  $a : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $b : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  gestellt werden müssen, wird im nächsten Abschnitt behandelt.

Mit

$$f(\widehat{S}_1, \dots, \widehat{S}_m)$$

wird erneut der diskontierte Payoff einer Option beschrieben, so dass der gesuchte Schätzer, also die pfadweise Ableitung des Optionsdeltas, dargestellt werden kann als

$$\sum_{n=1}^m \frac{df}{ds_n}(\widehat{S}_1, \dots, \widehat{S}_m)\widehat{\Delta}_n.$$

Die stochastische Differentialgleichung zu diesem Problem lautet

$$d\Delta_t = a'_S(S_t, t)\Delta_t dt + b'_S(S_t, t)\Delta_t dW_t, \quad \Delta_0 = 1 \quad (6.17)$$

und  $\Delta_t = \frac{dS_t}{dS_0}$ . Kombiniert man (5.17) und (6.17), um die beiden Anfangswertprobleme als ein System darzustellen erhält man für  $0 \leq t \leq T$ :

$$dS_t = a(S_t, t)dt + b(S_t, t)dW_t \quad (6.18)$$

$$d\Delta_t = A(S_t, t, \Delta_t)dt + B(S_t, t, \Delta_t)dW_t, \quad (6.19)$$

wobei  $A(S_t, t, \Delta_t) = a'_S(S_t, t)\Delta$  und  $B(S_t, t, \Delta_t) = b'_S(S_t, t)\Delta$  sowie gegebenen Anfangswerten  $S_0$  und  $\Delta_0 = 1$ .

## 6.6 Starke Ordnung

Um mit der MLMC Methode das  $\Delta_T$  zu schätzen, benötigt man die starke Ordnung des Euler-Verfahrens angewandt auf die SDGL (6.19). Dazu benutzt man Satz 5.12, wobei für den stochastischen Koeffizienten  $\omega$  die simulierte Lösung der SDGL (6.18) eingesetzt wird. Die angepassten Voraussetzungen für die Funktionen  $a(t, S) : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  und  $b(t, S) : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  sehen wie folgt aus:

### Definition 6.2

1. Die Funktion  $a(S, t)$  ist stetig differenzierbar in beiden Variablen und es existiert ein  $C(S)$  sowie  $\Delta \in \mathbb{R}^d$ , so dass

$$|a'_S(S, t) - a'_S(S, s)| \leq C(S) \left( \frac{1}{|\Delta|} + 1 \right) \sqrt{t - s}$$

und für jedes  $p \geq 2$  ist  $E[(C(S))^p] < \infty$ .

2. Für jedes feste  $\Delta$  ist  $a'_S(\cdot, \cdot)\Delta$  ein  $F_t$ -adaptierter Prozess.
3. Für alle  $t \in [0, T]$  und  $S \in \mathbb{R}^d$  ist  $|a_S(t, S)| < \infty$ .

Die gleichen Bedingungen gelten natürlich auch für  $b$ . Weiter ist noch zu beachten, dass in (6.19) der exakte Wert für  $S_t$  steht, dieser aber nur mit dem Euler-Verfahren approximiert wird. Deshalb ist der Fehler der Euler-Approximation (6.16) von folgender SDGL gesucht:

$$d\tilde{\Delta}_t = a'_S(\hat{S}_t, t)\tilde{\Delta}_t dt + b'_S(\hat{S}_t, t)\tilde{\Delta}_t dW_t, \quad \tilde{\Delta}_0 = 1. \quad (6.20)$$

Es sei noch bemerkt, dass die Euler-Approximation der SDGL (6.19) wie folgt aussieht

$$\bar{\Delta}_{n+1} = \bar{\Delta}_n + a'_S(S_n, t_n)\bar{\Delta}_n h + b'_S(S_n, t_n)\bar{\Delta}_n \sqrt{h} Z_{n+1}, \quad \bar{\Delta}_0 = 1. \quad (6.21)$$

Der gewünschte Satz lautet also:

**Satz 6.3** *Genügen die Funktionen  $a$  und  $b$  aus Gleichung (6.18) den Bedingungen aus Definition 6.2 sowie der folgenden Lipschitzbedingung*

$$|f'_S(S_1, t) - f'_S(S_2, t)| \leq C_t(S_1 - S_2)$$



für alle  $f \in \{a, b\}$  und einer von  $t$  abhängigen Konstante  $C_t \in \mathbb{R}$  und weiter sei  $\widehat{\Delta}$  aus Gleichung (6.16) die Euler Approximation der SDGL (6.19) und  $E[|X_t|^p] < \infty$  für alle  $0 \leq t \leq T$ , dann existiert eine von  $\delta$  unabhängige Konstante  $C \in (0, \infty)$ , so dass

$$E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |\Delta_t - \widehat{\Delta}_t|^p \right] \leq C\delta^{p/2}. \quad (6.22)$$

**Beweis.** Zunächst nutzen wir folgende Abschätzung, um den starken Fehler in zwei Summanden aufzuteilen:

$$\begin{aligned} E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |\Delta_t - \widehat{\Delta}_t|^p \right] &= E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |\Delta_t - \overline{\Delta}_t + \overline{\Delta}_t - \widehat{\Delta}_t|^p \right] \\ &\leq 2^{p-1} \left( E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |\Delta_t - \overline{\Delta}_t|^p \right] + E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |\overline{\Delta}_t - \widehat{\Delta}_t|^p \right] \right). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Die Abschätzung des ersten Summanden folgt direkt aus Satz 5.12, da wegen  $A(S_t, t, \Delta_t) = a'_S(S_t, t)\Delta$  und den Voraussetzungen aus Definition 6.2, die Bedingungen aus Definition 5.11 erfüllt sind. Es folgt nämlich aus Bedingung (1), dass  $a'_S(S_t, t)$  existiert und

$$|A(S, t, \Delta) - A(S, s, \Delta)| \leq |a'_S(S, t) - a'_S(S, s)| |\Delta| \leq C(S)(1 + \Delta)\sqrt{t - s}.$$

Für festes  $\Delta$  gilt Bedingung (2), weil  $A(\cdot, \cdot, \Delta)$  auch  $F_t$ -adaptiert ist. Da  $A(S, t, \Delta)$  linear in  $\Delta$  ist, gilt stetige Differenzierbarkeit in  $\Delta$  und für  $\sup_{t, S} |a'_S(t, S)| = C$  folgt

$$|A(S, t, \Delta_1) - A(S, t, \Delta_2)| = |a'_S(t, S)| |\Delta_1 - \Delta_2| \leq C |\Delta_1 - \Delta_2|.$$

Somit gilt

$$E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |\Delta_t - \overline{\Delta}_t|^p \right] \leq C\delta^{p/2}. \quad (6.24)$$

Um den zweiten Summanden  $E \left[ \sup_{0 \leq t \leq T} |\overline{\Delta}_t - \widehat{\Delta}_t|^p \right]$  zu berechnen, betrachtet man  $\overline{\Delta}_t$  und  $\widehat{\Delta}_t$  in der folgenden zeitstetigen Variante

$$\overline{\Delta}_t = \overline{\Delta}_{t_k} + \int_{t_k}^t a'_S(S_{\eta(\tau)}, \eta(\tau)) \overline{\Delta}_{\eta(\tau)} d\tau + \int_{t_k}^t b'_S(S_{\eta(\tau)}, \eta(\tau)) \overline{\Delta}_{\eta(\tau)} dW_\tau \quad (6.25)$$

$$\widehat{\Delta}_t = \widehat{\Delta}_{t_k} + \int_{t_k}^t a'_S(\widehat{S}_{\eta(\tau)}, \eta(\tau)) \widehat{\Delta}_{\eta(\tau)} d\tau + \int_{t_k}^t b'_S(\widehat{S}_{\eta(\tau)}, \eta(\tau)) \widehat{\Delta}_{\eta(\tau)} dW_\tau, \quad (6.26)$$

wobei  $t \in [t_k, t_{k+1}]$  und  $\eta(\tau) = \max_{k=0,1,\dots} \{t_k : t_k \leq \tau\}$ . Dies liefert wegen  $\bar{\Delta}_0 = \hat{\Delta}_0 = 1$  unter Vernachlässigung des Supremums

$$\begin{aligned}
E \left[ \left| \bar{\Delta}_t - \hat{\Delta}_t \right|^p \right] &= E \left[ \left| \int_0^t a'_S(S_{\eta(\tau)}, \eta(\tau)) \bar{\Delta}_{\eta(\tau)} d\tau - \int_0^t a'_S(\hat{S}_{\eta(\tau)}, \eta(\tau)) \hat{\Delta}_{\eta(\tau)} d\tau \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_0^t b'_S(S_{\eta(\tau)}, \eta(\tau)) \bar{\Delta}_{\eta(\tau)} dW_\tau - \int_0^t b'_S(\hat{S}_{\eta(\tau)}, \eta(\tau)) \hat{\Delta}_{\eta(\tau)} dW_\tau \right|^p \right] \\
&\leq 2^{p-1} \left( E \left[ \left| \int_0^t a'_S(S_{\eta(\tau)}, \eta(\tau)) \bar{\Delta}_{\eta(\tau)} - a'_S(\hat{S}_{\eta(\tau)}, \eta(\tau)) \hat{\Delta}_{\eta(\tau)} d\tau \right|^p \right] \right. \\
&\quad \left. + E \left[ \left| \int_0^t b'_S(S_{\eta(\tau)}, \eta(\tau)) \bar{\Delta}_{\eta(\tau)} - b'_S(\hat{S}_{\eta(\tau)}, \eta(\tau)) \hat{\Delta}_{\eta(\tau)} dW_\tau \right|^p \right] \right) \\
&\stackrel{(*)}{\leq} 2^{p-1} \left( t^{p-1} \int_0^t E \left[ \left| a'_S(S_{\eta(\tau)}, \eta(\tau)) \bar{\Delta}_{\eta(\tau)} - a'_S(\hat{S}_{\eta(\tau)}, \eta(\tau)) \hat{\Delta}_{\eta(\tau)} \right|^p \right] d\tau \right. \\
&\quad \left. + C_{Burk} t^{\frac{p}{2}-1} \int_0^t E \left[ \left| b'_S(S_{\eta(\tau)}, \eta(\tau)) \bar{\Delta}_{\eta(\tau)} - b'_S(\hat{S}_{\eta(\tau)}, \eta(\tau)) \hat{\Delta}_{\eta(\tau)} \right|^p \right] d\tau \right) \\
&= 2^{p-1} \left( t^{p-1} \int_0^t E [|A(\tau)|^p] d\tau + C_{Burk} t^{\frac{p}{2}-1} \int_0^t E [|B(\tau)|^p] d\tau \right), \quad (6.27)
\end{aligned}$$

wegen der Hölder-Ungleichung für Integrale, Fubini und der Burkholder-Davis-Gundy Ungleichung bei (\*) (vgl. Umformungen (5.27) und (5.29)).

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
E [|A(\tau)|^p] &= E \left[ \left| a'_S(S_{\eta(\tau)}, \eta(\tau)) \bar{\Delta}_{\eta(\tau)} - a'_S(\hat{S}_{\eta(\tau)}, \eta(\tau)) \bar{\Delta}_{\eta(\tau)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + a'_S(\hat{S}_{\eta(\tau)}, \eta(\tau)) \bar{\Delta}_{\eta(\tau)} - a'_S(\hat{S}_{\eta(\tau)}, \eta(\tau)) \hat{\Delta}_{\eta(\tau)} \right|^p \right] \\
&\leq 2^{p-1} \left( E \left[ \left| a'_S(S_{\eta(\tau)}, \eta(\tau)) - a'_S(\hat{S}_{\eta(\tau)}, \eta(\tau)) \right|^p \left| \bar{\Delta}_{\eta(\tau)} \right|^p \right] \right. \\
&\quad \left. + E \left[ \left| \bar{\Delta}_{\eta(\tau)} - \hat{\Delta}_{\eta(\tau)} \right|^p \left| a'_S(\hat{S}_{\eta(\tau)}, \eta(\tau)) \right|^p \right] \right) \\
&\stackrel{(*)}{\leq} 2^{p-1} \left( E \left[ \left| a'_S(S_{\eta(\tau)}, \eta(\tau)) - a'_S(\hat{S}_{\eta(\tau)}, \eta(\tau)) \right|^{2p} \right]^{1/2} E \left[ \left| \bar{\Delta}_{\eta(\tau)} \right|^{2p} \right]^{1/2} \right. \\
&\quad \left. + C_a^p E \left[ \left| \bar{\Delta}_{\eta(\tau)} - \hat{\Delta}_{\eta(\tau)} \right|^p \right] \right) \\
&\stackrel{\text{Lipschitzbed.}}{\leq} 2^{p-1} \left( C_1 C_t^p E \left[ \left| S_{\eta(\tau)} - \hat{S}_{\eta(\tau)} \right|^{2p} \right]^{1/2} + C_a^p E \left[ \left| \bar{\Delta}_{\eta(\tau)} - \hat{\Delta}_{\eta(\tau)} \right|^p \right] \right) \\
&\leq 2^{p-1} C_1 C_t^p \delta^{\frac{p}{2}} + 2^{p-1} C_a^p E \left[ \left| \bar{\Delta}_{\eta(\tau)} - \hat{\Delta}_{\eta(\tau)} \right|^p \right], \quad (6.28)
\end{aligned}$$

wobei in (\*) für den ersten Summanden die Hölder-Ungleichung (bzw. der Spezialfall der Cauchy-Schwarz Ungleichung) und für den zweiten Summanden die Voraussetzung  $|a'_S(t, S)| = C_a < \infty$  benutzt wurde sowie im letzten Schritt die starke Ordnung aus Definition 2.3. Mit dem Lemma von Gronwall folgt nun

$$E [|A(\tau)|^p] \leq C\delta^{\frac{p}{2}}e^{Ct} \quad (6.29)$$

für eine von  $\delta$  unabhängige Konstante  $C = \max \{2^{p-1}C_1C_t^p, 2^{p-1}C_a^p\}$ .

Für  $B(\tau)$  ergibt die analoge Rechnung

$$E [|B(\tau)|^p] \leq C\delta^{\frac{p}{2}}e^{Ct}. \quad (6.30)$$

Diese beiden Ergebnisse in 6.27 eingesetzt, ergeben für eine sich ändernde von  $\delta$  unabhängige Konstante  $C$

$$\begin{aligned} E \left[ \left| \overline{\Delta}_t - \widehat{\Delta}_t \right|^p \right] &\leq 2^{p-1} \left( t^{p-1} \int_0^t C\delta^{\frac{p}{2}}e^{C\tau}d\tau + C_{Burk}t^{\frac{p}{2}-1} \int_0^t C\delta^{\frac{p}{2}}e^{C\tau}d\tau \right) \\ &\leq C\delta^{\frac{p}{2}}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Dies mit (6.24) in (6.23) eingesetzt, führt zum gewünschten Ergebnis.

□

# Kapitel 7

## Anwendungen des MLMC Algorithmus

Die Vorbereitungen aus den vorherigen Kapiteln werden nun dazu benutzt, die MLMC Methode auf eine digitale Option anzuwenden (vgl. [5], Abschnitt 5). Dazu wird insbesondere Satz 5.9 benötigt, der die starke Ordnung des Euler-Verfahrens für nichtstetige Funktionale angibt.

Im zweiten Teil werden die Ergebnisse der digitalen Option sowie der Satz 5.12 zur starken Ordnung für den Fall, dass die approximierte Lösung auch von einem stochastischen Koeffizienten abhängt, benutzt, um das Optionsdelta mittels MLMC zu schätzen.

### 7.1 Digitale Option

Der diskontierte Payoff  $P$  einer digitalen Option zum Strike  $K$  bestimmt sich durch

$$P = e^{-rT} \mathbf{1}_{S_T \geq K} = e^{-rT} \chi_{[K, \infty)}(S_T). \quad (7.1)$$

Er ist also  $e^{-rT}$ , falls die Aktie am Fälligkeitsdatum größer gleich dem Strike ist und ansonsten null. Die Payofffunktion hat somit eine Unstetigkeitsstelle in  $S_T = K$ . Um den MLMC Algorithmus anwenden zu können, benötigt man die schwache und starke Ordnung der Approximation  $\hat{P}$  von  $P$ , die mit dem Euler-Verfahren angewandt auf die SDGL (2.1) erstellt wird.

Aus [1], Theorem 3.1 folgt, dass die schwache Ordnung 1 ist und damit gilt für die Bedingung i) im Komplexitätstheorem, dass  $\alpha = 1$ . Das  $\beta$  aus Bedingung iii) wird mit

Hilfe von Satz 5.9 und Bemerkung 5.10 bestimmt, denn daraus folgt

$$E \left[ \left| \chi_{[K, \infty)}(S_T^E) - \chi_{[K, \infty)}(S_T) \right|^2 \right] \leq Ch^{\frac{1}{2} - \frac{2+G}{(-\log|h|)^{1/3}}} \quad (7.2)$$

für  $C = \left( D_{X_T}(K) \vee \sqrt{D_{X_T}(K)} \right) > 0$ , Schrittweite  $h$  und die Konstante  $G > 0$  (da  $M$  im Komplexitätstheorem für den Schrittweitenparameter steht). Wegen

$$\text{Var}[\widehat{P} - P] \leq E[(\widehat{P} - P)^2] \stackrel{(7.1)}{=} e^{-2rT} E \left[ \left| \chi_{[K, \infty)}(S_T) - \chi_{[K, \infty)}(S_T^E) \right|^2 \right]$$

und (7.2) folgt, dass  $\beta_h = \frac{1}{2} - \frac{2+G}{(-\log|h|)^{1/3}} = \frac{1}{2} - \frac{A}{(l \log M)^{1/3}}$  mit  $A = G + 2 > 0$ . Da in der Voraussetzung von Satz 5.9 gefordert wird, dass  $h = M^{-l} < m$ , folgt mit der Eigenschaft, dass die Logarithmusfunktion streng monoton steigend ist

$$\begin{aligned} \beta_h &= \frac{1}{2} - \frac{A}{(-\log(M^{-l} \wedge m))^{1/3}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{A}{(\log(M^{-l} \wedge m)^{-1})^{1/3}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{A}{(\log(M^l \vee m^{-1}))^{1/3}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{A}{(l \log M \vee (-\log m))^{1/3}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{A}{(l \log M \vee B)^{1/3}} \end{aligned} \quad (7.3)$$

für alle  $l = 0, 1, \dots, L$  und  $B = -\log m > 0$  wegen  $m \in (0, 1)$ . Das  $\beta_h$  hängt also von der Schrittweite  $h$  bzw. dem Level  $l$  ab und ist somit nicht konstant wie in den vorherigen Fällen. Eingesetzt in Bedingung iii) gilt für  $T = 1$

$$\begin{aligned} \text{Var}[\widehat{Y}_l] &\leq c_2 N_l^{-1} h_l^\beta \\ &= c_2 N_l^{-1} M^{-\frac{l}{2} + \frac{Al}{(l \log M \vee B)^{1/3}}}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Für  $\alpha = 1$  und  $\beta = \frac{1}{2}$  erhält man daraufhin aus dem Komplexitätstheorem, dass der Rechenaufwand durch  $c_4 \epsilon^{-\frac{5}{2}}$  beschränkt ist. Hierbei wurde der Anteil  $-\frac{2+G}{(-\log|h|)^{1/3}}$  vernachlässigt, da er für kleine  $h$  gegen Null konvergiert, wegen  $\lim_{h \downarrow 0} \log h = -\infty$ . Der MSE wird auf folgende Weise abgeschätzt:

$$E[(\widehat{Y} - E[P])^2] = E[(\widehat{P} - P)^2] + \text{Var}[\widehat{Y}] \leq \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2} \Phi(\epsilon), \quad (7.5)$$

mit

$$\Phi(\epsilon) := M^{-\frac{L(\epsilon)}{4}} \sum_{l=0}^{L(\epsilon)} M^{\frac{l}{4} + (Dl^{\frac{2}{3}} \vee E)}, \quad (7.6)$$

wobei  $D, E > 0$  und

$$L(\epsilon) := \left\lceil \frac{\log(\sqrt{2}c_1\epsilon^{-1})}{\log M} \right\rceil.$$

Die Abschätzung aus (7.5) für  $E[(\widehat{P} - P)^2]$  geht analog zum Beweis im Komplexitätstheorem. Für die Berechnung von  $\text{Var}[\widehat{Y}]$  wählt man wie in Teil c) des Beweises des Komplexitätstheorems

$$\begin{aligned} N_l &= \left[ 2\epsilon^{-2} c_2 h_{L(\epsilon)}^{-(1-\beta)/2} (1 - M^{-(1-\beta)/2})^{-1} h_l^{(\beta+1)/2} \right] \\ &= \left[ 2\epsilon^{-2} c_2 h_{L(\epsilon)}^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{A}{((l \log M) \vee B)^{1/3}})} \left( 1 - M^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{A}{((l \log M) \vee B)^{1/3}})} \right)^{-1} h_l^{\frac{1}{2}(\frac{3}{2} - \frac{A}{((l \log M) \vee B)^{1/3}})} \right]. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Weiter wird noch folgende Rechnung benötigt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{Al}{((l \log M) \vee B)^{1/3}} &= \frac{1}{2} l ((A^{-3} l \log M)^{1/3} \vee A^{-1} B^{1/3})^{-1} \\ &= l (l^{-1/3} D \wedge E^*) \end{aligned} \quad (7.8)$$

mit  $D = \frac{1}{2}(A^{-3} \log M)^{-1/3} > 0$  und  $E^* = \frac{1}{2}AB^{-1/3} > 0$ . Da  $l^{-1/3}D$  fallend in  $l$  ist, existiert ein  $l_0$ , so dass  $l^{-1/3}D \leq E^*$  für  $l > l_0$ . Deshalb ist

$$\begin{aligned} l (l^{-1/3} D \wedge E^*) &= \begin{cases} lE^* \leq l_0 E^* := E, & l \leq l_0 \\ l^{2/3} D, & l > l_0 \end{cases} \\ &\leq l^{2/3} D \vee E. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Damit folgt

$$\text{Var}[\widehat{Y}] \leq \sum_{l=0}^{L(\epsilon)} c_2 N_l^{-1} h_l^\beta$$

$$\begin{aligned}
&< \sum_{l=0}^{L(\epsilon)} \frac{1}{2} \epsilon^2 h_{L(\epsilon)}^{(1-\beta)/2} (1 - M^{-(1-\beta)/2}) h_l^{-(1-\beta)/2} \\
&= \sum_{l=0}^{L(\epsilon)} \frac{1}{2} \epsilon^2 h_{L(\epsilon)}^{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{A}{((l \log M) \vee B)^{1/3}} \right)} \left( 1 - M^{-\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{A}{((l \log M) \vee B)^{1/3}} \right)} \right) h_l^{-\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{A}{((l \log M) \vee B)^{1/3}} \right)} \\
&\leq \frac{1}{2} \epsilon^2 \sum_{l=0}^{L(\epsilon)} M^{-\frac{L(\epsilon)}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{A}{((l \log M) \vee B)^{1/3}} \right)} \left( 1 - M^{-\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{A}{((l \log M) \vee B)^{1/3}} \right)} \right) M^{\frac{l}{4} + (Dl)^{\frac{2}{3}} \vee E} \\
&\stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{2} \epsilon^2 \sum_{l=0}^{L(\epsilon)} M^{-\frac{L(\epsilon)}{4}} M^{\frac{l}{4} + (Dl)^{\frac{2}{3}} \vee E} \\
&= \frac{1}{2} \epsilon^2 M^{-\frac{L(\epsilon)}{4}} \sum_{l=0}^{L(\epsilon)} M^{\frac{l}{4} + (Dl)^{\frac{2}{3}} \vee E} \\
&= \frac{1}{2} \epsilon^2 \Phi(\epsilon), \tag{7.10}
\end{aligned}$$

da  $1 - M^{-\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{A}{((l \log M) \vee B)^{1/3}} \right)} \leq 1$  und  $M^{-\frac{L(\epsilon)A}{((l \log M) \vee B)^{1/3}}} \leq 1$  in (\*), wegen  $A, B, L(\epsilon) > 0$  sowie  $M > 1$ .

Es sei bemerkt, dass

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \epsilon^\delta \Phi(\epsilon) \rightarrow 0 \tag{7.11}$$

für beliebiges  $\delta > 0$ . Um dies zu zeigen, benutzt man

$$L(\epsilon) \leq \frac{\log(\sqrt{2}c_1\epsilon^{-1})}{\log M} + 1 \leq K_1 - K_2 \log \epsilon$$

für  $K_1, K_2 > 0$  sowie die Eigenschaft, dass

$$\sum_{l=0}^{L(\epsilon)} M^{\frac{l}{4} + (Dl)^{\frac{2}{3}} \vee E} \leq (L(\epsilon) + 1) M^{\frac{L(\epsilon)}{4} + (DL(\epsilon))^{\frac{2}{3}} \vee E},$$

da die Summanden monoton steigend in  $l$  sind. Es folgt

$$\begin{aligned}
\epsilon^\delta \Phi(\epsilon) &= \epsilon^\delta M^{-\frac{L(\epsilon)}{4}} \sum_{l=0}^{L(\epsilon)} M^{\frac{l}{4} + (Dl)^{\frac{2}{3}} \vee E} \\
&\leq \epsilon^\delta M^{-\frac{L(\epsilon)}{4}} (L(\epsilon) + 1) M^{\frac{L(\epsilon)}{4} + (DL(\epsilon))^{\frac{2}{3}} \vee E} \\
&\leq \epsilon^\delta (K_1 - K_2 \log(\epsilon)) M^{(DL(\epsilon))^{\frac{2}{3}} \vee E}
\end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} 0. \quad (7.12)$$

Dass dieser Grenzwert gegen 0 konvergiert, wird deutlich, wenn der Einfachheit halber nur die von  $\epsilon$  abhängigen Terme betrachtet werden:

$$\begin{aligned} \epsilon^\delta \log(\epsilon^{-1}) M^{(-\log \epsilon)^{\frac{2}{3}}} &= e^{\delta \log \epsilon} e^{\log(-\log \epsilon)} e^{(-\log \epsilon)^{\frac{2}{3}} \log M} \\ &= \exp\left(\delta \log \epsilon + \log(-\log \epsilon) + (-\log \epsilon)^{\frac{2}{3}} \log M\right) \\ &\xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} 0, \end{aligned} \quad (7.13)$$

da  $\log \epsilon$  schneller gegen  $-\infty$  konvergiert als die beiden anderen Summanden gegen  $+\infty$  und außerdem  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .

## 7.2 Delta einer europäischen Option

Eine Möglichkeit der Berechnung des Optionsdeltas wurde schon in Abschnitt 6.3.1 gezeigt. Hier sollen jedoch die Erkenntnisse aus Abschnitt 7.1 benutzt werden, indem die beiden Faktoren aus Gleichung (6.4)

$$F := \frac{dY}{dS(0)} = \frac{dY}{dS(T)} \frac{dS(T)}{dS(0)} \quad (7.14)$$

einzelnen approximiert werden. Der erste Faktor  $F_1 := \frac{dY}{dS(T)} = e^{-rT} \mathbf{1}\{S(T) > K\}$  wird mittels Simulation von  $S(T)$  durch das Euler-Verfahren (6.14) erstellt, der zweite Faktor  $F_2 := \frac{dS(T)}{dS(0)}$  mit Hilfe der Simulation von  $\Delta(T)$  durch (6.16), so dass man die beiden Schätzer  $\widehat{F}_1$  und  $\widehat{F}_2$  erhält.

Um das Komplexitätstheorem anwenden zu können, benötigt man die starke und schwache Ordnung des Gesamtschätzers  $\widehat{F} = \widehat{F}_1 \widehat{F}_2$ . Die starken Ordnungen der beiden einzelnen Faktoren wurden in den Sätzen 5.9 und 5.12 hergeleitet. Der Beweis der schwachen Ordnungen würde den Rahmen dieser Diplomarbeit sprengen, deshalb wird in beiden Fällen eine schwache Ordnung von 1 angenommen mit Bezug auf die Quellen [1] für den Fall der Indikatorfunktion und [9], Abschnitt 1.4 für die SDE mit stochastischen Koeffizienten. Natürlich wird wieder vorausgesetzt, dass die Bedingungen aus Definition 6.2 an  $a$  und  $b$  erfüllt sind und für die Simulation des Schätzers das Euler-Verfahren mit Schrittweite  $h$  verwendet wird.

Auch hier wird der Einfachheit halber angenommen, dass die schwache Ordnung des



Gesamtschätzers 1 beträgt. Es gilt also

$$\begin{aligned} \left| E[\widehat{F} - F] \right| &= \left| E[\widehat{F}_1 \widehat{F}_2 - F_1 F_2] \right| \\ &= O(h). \end{aligned} \tag{7.15}$$

Dies lässt sich damit begründen, dass die schwache Ordnung der beiden einzelnen Schätzer  $\widehat{F}_1$  und  $\widehat{F}_2$  ebenfalls 1 ist und wird auch durch Abbildung 7.3 bestätigt. Eine Abschätzung von Gleichung (7.15) zum Beispiel mit Hölder ist zu ungenau und führt zu einer schwachen Ordnung von  $1/2$  (Beweis verläuft analog zu dem der starken Ordnung). Aufgrund dieser Annahme gilt für die Bedingung i) des Komplexitätstheorems  $\alpha = 1$ .

Anstatt die starke Ordnung zu berechnen, wird jetzt sofort die Ordnung der quadratischen Abweichung berechnet, um daraus die Ordnung der Varianz zu bestimmen, die für iii) des Komplexitätstheorems benötigt wird.

$$\begin{aligned} E[|\widehat{F} - F|^2] &= E[|\widehat{F}_1 \widehat{F}_2 - F_1 F_2|^2] \\ &= E[|(\widehat{F}_2 - F_2)\widehat{F}_1 + (\widehat{F}_1 - F_1)F_2|^2] \\ &\leq 2 \left( E[|\widehat{F}_2 - F_2|^2 |\widehat{F}_1|^2] + E[|\widehat{F}_1 - F_1|^2] F_2^2 \right) \\ &\leq 2 \left( E[|\widehat{F}_2 - F_2|^4]^{1/2} E[|\widehat{F}_1|^4]^{1/2} + E[|\widehat{F}_1 - F_1|^2] F_2^2 \right) \\ &\leq K_3 E[|\widehat{F}_2 - F_2|^4]^{1/2} + K_4 E[|\widehat{F}_1 - F_1|^2] \\ &= K \left( h + h^{\frac{1}{2} - \frac{2+G}{(-\log|h|)^{1/3}}} \right) \\ &= O \left( h^{\frac{1}{2} - \frac{2+G}{(-\log|h|)^{1/3}}} \right), \end{aligned} \tag{7.16}$$

für  $G > 0$  und da  $2E[|\widehat{F}_2|^4]^{1/2} = K_3$  beschränkt ist, so dass  $\beta = \frac{1}{2} - \frac{2+G}{(-\log|h|)^{1/3}}$ .

Wie in Gleichung (7.5) wird nun der MSE abgeschätzt. Es gelte unter der Annahme  $T = 1$

$$L(\epsilon) := \left\lceil \frac{\log(\sqrt{2}c_1\epsilon^{-1})}{\alpha \log M} \right\rceil,$$

so dass

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon M^{-\alpha} < c_1 h_L^\alpha \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon$$

gilt. Deshalb ist analog zum Beweis im Komplexitätstheorem  $E[(\hat{F} - F)^2] < \frac{\epsilon^2}{2}$ . Außerdem ist wie in Kapitel 7.1

$$\text{Var}[\hat{Y}] \leq \frac{\epsilon^2}{2} \Phi(\epsilon)$$

mit dem gleichen  $\Phi(\epsilon)$ , wie in (7.6), da die starke Ordnung hier die gleiche ist. Somit ist auch

$$E[(\hat{Y} - E[P])^2] = E[(\hat{P} - P)^2] + \text{Var}[\hat{Y}] \leq \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2} \Phi(\epsilon). \quad (7.17)$$

Für den Rechenaufwand erhält man mit  $\alpha = 1$  und  $\beta = \frac{1}{2}$  unter Vernachlässigung der log-Terme eine Schranke von  $c_4 \epsilon^{-\frac{5}{2}}$ .

## 7.3 Ergebnisse

Weiter sollen nun die Ergebnisse des MLMC-Algorithmus im Falle einer geometrisch Brownschen Bewegung (vgl. (4.2)) für den Aktienkurs präsentiert werden. Es sei noch bemerkt, dass Gleichung (6.19) daraufhin ebenfalls eine geometrisch Brownsche Bewegung wird, nämlich

$$d\Delta_t = r\Delta_t dt + \sigma\Delta_t dW_t.$$

### 7.3.1 Digitale Option

Die Digitale Option besitzt die Payofffunktion

$$P = \exp(-0.05) \mathbf{1}_{S_T \geq 1}.$$

Der Preis dieser Option beträgt gerundet 0.5323 (vgl. [10], Abschnitt 22.7). Für  $\epsilon = 0.0005$  ergab der MLMC-Algorithmus einen Preis von 0.5322.

Die Steigung der Samplevarianzen (oben links in Abbildung 7.1) beträgt ungefähr  $-0.5$ , so dass wie erwartet  $V_i = O(h_i^{1/2})$  gilt, während die Erwartungswerte der Samples  $O(h)$  Konvergenz besitzen. Ersteres ist der Grund dafür, dass eine weitaus höhere Anzahl an Samples erstellt werden muss, als im Beispiel der Europäischen oder Asiatischen Option. Die beiden rechten Grafiken zeigen, dass die Richardson Extrapolation hier große Vorteile hat.

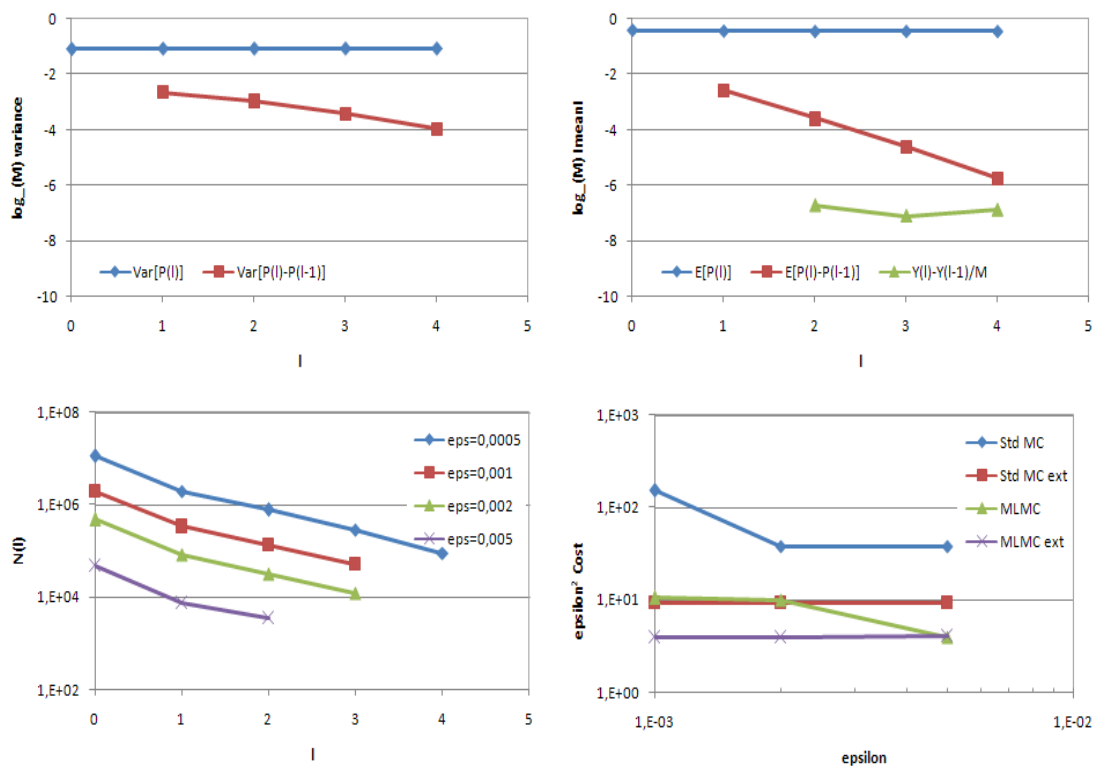


Abbildung 7.1: Ergebnisse Digitale Option

Die RMSE/ $\epsilon$  Werte ergaben sich als 0.58 – 0.87 (MLMC) und 0.53 – 0.69 (MLMC mit Richardson Extrapolation).

### 7.3.2 Delta der Europäischen Option

Der Wert des Deltas der Europäischen Option bestimmt sich in diesem Beispiel als

$$P = \exp(-0.05)S(T)\mathbf{1}_{S(T)>1}.$$

Er beträgt 0.6368 (vgl. [10], S.346) und ergab sich im Algorithmus als 0.6376 für  $\epsilon = 0.0005$ . Der Wert ist größer als derjenige der digitalen Option, da der Payoff der digitalen Option noch mit  $S(T)$  multipliziert wird, was aufgrund der Indikatorfunktion größer als 1 ist.

Aufgrund der „Payofffunktion“ sind auch die Ergebnisse des Algorithmus aus Abbildung 7.2 den Ergebnissen der Digitalen Option sehr ähnlich. Der RMSE/ $\epsilon$  lag im Bereich von  $0.67 - 0.95$  (MLMC) und  $0.56 - 0.69$  (MLMC mit Richardson Extrapolation).

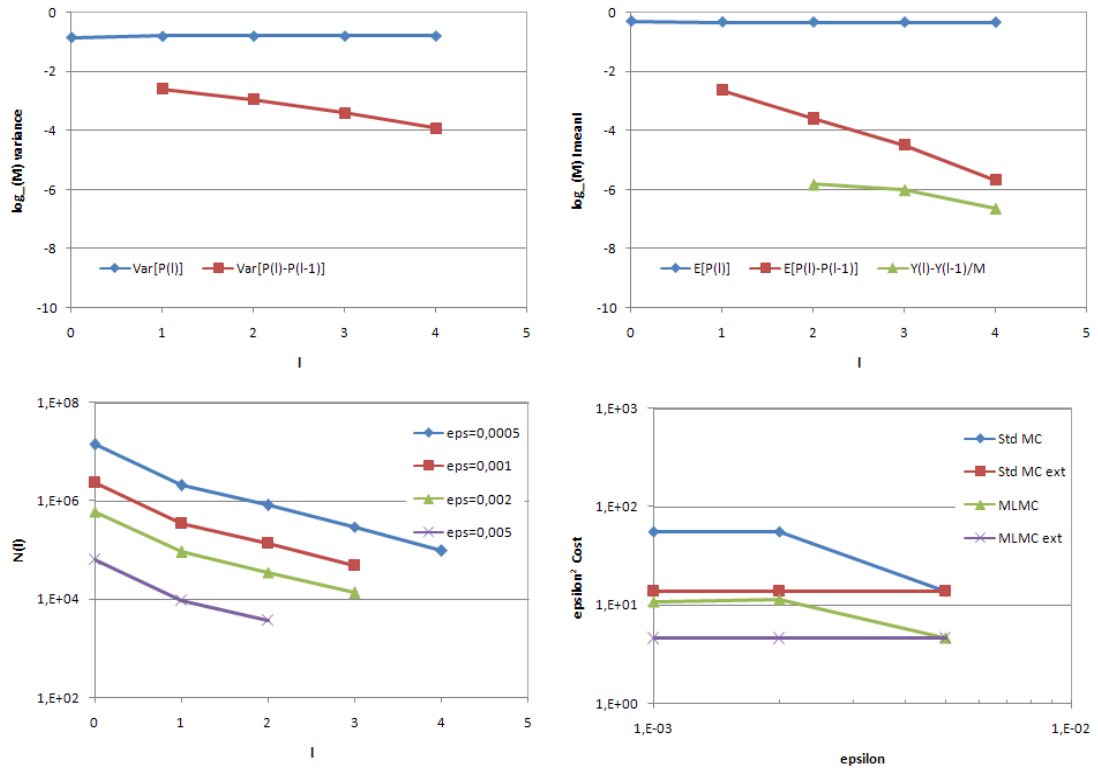


Abbildung 7.2: Ergebnisse Delta mit einem Pfad

In der folgenden Abbildung 7.3 wurde nicht nur der Aktienkurs simuliert, sondern auch ein Pfad für das Delta (vgl. Gleichung (7.14)).

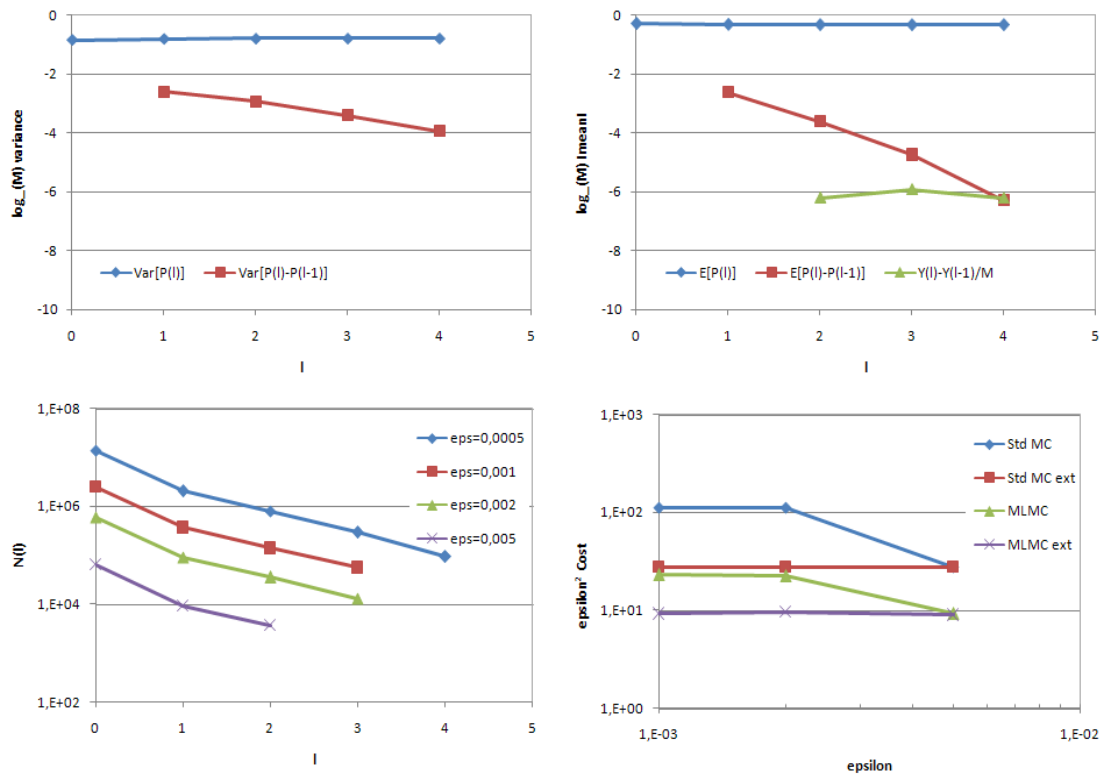


Abbildung 7.3: Ergebnisse Delta mit zwei Pfaden

Dieses Verfahren bringt für den Fall des Deltas einer Europäischen Option keinen Vorteil. Es führt nur zu einer Verdopplung des Rechenaufwands. Außerdem ist die Steigung der Erwartungswertsamples (Grafik oben rechts)  $-1$ , wie im vorherigen Unterkapitel angenommen.

# Kapitel 8

## Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde deutlich, dass die Multilevel Monte Carlo Methode eine signifikante Verbesserung gegenüber der Monte Carlo Methode darstellt. Sie schafft es den Rechenaufwand zu verringern und in fast allen Fällen die gewollte Genauigkeit zu erreichen. Die Erweiterung durch Richardson Extrapolation brachte immer eine Verringerung des Rechenaufwands oder zumindest keine Verschlechterung, auch wenn nicht in allen Fällen die schwache Konvergenzordnung verdoppelt wurde.

Im Falle der Optionssensitivitäten ist eine Anwendung des MLMC-Algorithmus problematisch. Das Funktional, das auf den Aktienkurs angewendet wird, darf keine Unstetigkeitsstelle besitzen, bzw. im Falle des Gammas muss es stetig differenzierbar sein. Die Anwendung der MLMC Methode macht dann vor allem Sinn, wenn sich die Sensitivität als Funktion des Aktienkurses umformen lässt, so dass nur der Pfad der Aktie simuliert werden muss. Nur wenn dies nicht möglich ist, wäre es sinnvoll, die in Kapitel 6.5 am Beispiel des Deltas vorgestellte Methode zu benutzen, in der man einen zweiten Pfad für das Delta simuliert.

Weitere Verbesserungsmöglichkeiten könnten in der Wahl von anderen varianzreduzierenden Methoden liegen oder durch Verwendung von Diskretisierungsverfahren mit höherer starker Ordnung als das Euler-Verfahren (vgl. [7], Verwendung des Milstein-Verfahrens). In diesem Fall ist theoretisch ein Rechenaufwand der Größenordnung  $O(\epsilon^{-2})$  möglich, da die Anzahl der zu erstellenden Samples nicht mehr mit steigendem  $L$  erhöht wird. Somit könnte das  $L$  so groß gewählt werden, dass der Bias verschwindet und der MSE ausschließlich von der Varianz des Schätzers abhängt. Um diese auf eine Größenordnung von  $O(\epsilon^2)$  zu bringen, ist es nötig,  $O(\epsilon^{-2})$  Pfade zu erstellen (siehe Gleichung (3.6)), was den Rechenaufwand begründet.

# Anhang A

## Programmierung mit VBA in Excel

Dies ist das Excel Sheet von dem aus der MLMC-Algorithmus gesteuert wird. Gelb hinterlegt sind die Felder in denen die Inputwerte stehen.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	Multi-Level Monte Carlo Methode $ds = r S dt + \sigma S dW$														
2									I	Var[P(i)]	Var[P(i)-P(i-1)]	E[P(i)]	E[P(i)-P(i-1)]	Y(i)-Y(i-1)/M	N(i)
3	Konstanten			Payoff		Delta				0 0,016107		0,10205			6414644
4	T		1	European Option		1 Euro Delta		5		1 0,020116	0,000445985	0,10419	0,00208344		533142
5	M		4	Asian Option		2 Asian Delta		6		2 0,021175	0,000106693	0,10435	0,00029664	-0,00022422	130351
6	LL (max Läufe)		5	Lookback Option		3 Euro Delta (2 Pfade)		7		3 0,022102	2,78981E-05	0,10498	9,0443E-05	1,6282E-05	33450
7	epsilon		0,0001	Digital Option		4 Asian Delta (2 Pfade)		8							
8	S(0)		1						log						
9	r		0,05	Wähle Option		1			I	Var[P(i)]	Var[P(i)-P(i-1)]	E[P(i)]	E[P(i)-P(i-1)]	Y(i)-Y(i-1)/M	N(i)
10	sigma		0,2							0 -2,97811		-1,64633			6,807173
11	Strike		1							1 -2,81777	-5,565357958	-1,63133	-4,45340977		5,726843
12				Methode						2 -2,78075	-6,59712116	-1,63023	-5,8594913	-6,06141297	5,115114
13				MLMC		1				3 -2,74984	-7,564735614	-1,62593	-6,71631323	-7,9531605	4,524396
14	Preis		0,10451949	MC		2									
15	MSE		1,0617E-08												
16	Rechenaufwand		14363374	Wähle Methode:		1									
17	C*eps*2		0,14363374												
18	Abbruch bei L =		3	Erweiterung											
19	RMSE/eps		1,03039653	Standard		1									
20				Richardson		2									
21				Wähle Erweiterung:		1									
22				START											

Abbildung A.1: Input und Output in Excel

Außerdem folgt noch der Programmcode, der mit VBA geschrieben wurde:

```
Public Pi, T, u1, v1, r, sigma, SO, D0 As Double
Public Strike As Double
Public M, LL As Integer
Public Payoff() As Variant
Public h As Double
Public Differenz As Variant
```

```
Sub MLMC()
```

```
'Deklaration des Variablentyps
```

```
Dim optionswahl As Integer
```

```
Dim l As Long
```

```
Dim i As Long
```

```
Dim J As Long
```

```
Dim k As Long
```

```
Dim NI As Long
```

```
Dim maxanzahl As Long
```

```
Dim start, test, lll As Long
```

```
Dim zahl As Long
```

```
Dim zahlen As Double
```

```
Dim h As Double
```

```
Dim num As Double
```

```
Dim NN, eps As Double
```

```
Dim var1, var2, summe As Double
```

```
Dim inkremente(), S1(), S2(), Liste(), Variance(), Anzahl(), Erwartung(), Vector() As Variant
```

```
Dim NIVector() As Variant
```

```
Dim methode As Integer
```

```
Dim erweiterung As Integer
```

```
Dim C, MSE, VarMSE As Double
```

```
Dim summe2 As Double
```

```
'Setze bestimmte Konstanten
```

```
Pi = 4 * Atn(1)
```

```
h = 0
```

```
NI = 10000
```

```
maxanzahl = 3000000
```

```
'Input aus Excel Sheet
```

```
T = Sheets("MC").Cells(4, 2)
```

```
M = Sheets("MC").Cells(5, 2)
```

```
LL = Sheets("MC").Cells(6, 2)
```

```
eps = Sheets("MC").Cells(7, 2)
```

```
optionswahl = Sheets("MC").Cells(9, 5)
```

```
SO = Sheets("MC").Cells(8, 2)
```

```
r = Sheets("MC").Cells(9, 2)
```

```
sigma = Sheets("MC").Cells(10, 2)
```

```
Strike = Sheets("MC").Cells(11, 2)
```

```
optionswahl = Sheets("MC").Cells(9, 5)
```

```
methode = Sheets("MC").Cells(16, 5)
```

```
erweiterung = Sheets("MC").Cells(23, 5)
```

```
D0 = 1
```

```
'erstelle Matrizen
```

```
ReDim Anzahl(2, LL + 1)
```

```
ReDim Payoff(1 + 2 * LL, maxanzahl)
```



```

ReDim Differenz(1 + LL, maxanzahl)
ReDim Variance(1, LL + 1)
ReDim Vector(1, LL + 1)
ReDim NIVector(1, LL + 1)

Randomize (0.0001)

'erste große Schleife
For l = 0 To LL

Anzahl(1, l + 1) = NI
'lösche Erwartungsvektor vor jedem Lauf
ReDim Erwartung(1, l + 1)

h = M ^ (-l) * T

'erstelle die ersten 10000 Samples
For J = 1 To NI

ReDim inkremente(T / h, 2)
ReDim S1(T / h + 1, 2)
ReDim S2(T / h + 1, 2)

'erstelle Vektor mi T/h Zufallszahlen
If l > 0 Then

For i = 1 To T / h

num = Application.WorksheetFunction.NormSInv(Rnd)
inkremente(i, 1) = num * h ^ (0.5)

Next i

'Summiere Inkremente zu Gruppen der Größe M --> inkremente für P(l-1)
If methode = 1 Then
For i = 1 To T / h / M
For k = 1 To M
inkremente(i, 2) = inkremente(i, 2) + inkremente(M * (i - 1) + k, 1)
Next k
Next i
End If

'Fall l=0
Else

num = Application.WorksheetFunction.NormSInv(Rnd)
inkremente(1, 1) = num * h ^ (0.5)

End If

'erstelle Pfad der Aktie (2 Pfade da im Falle l=1,2.... zwei Payoffs berechnet werden)
If l > 0 Then

S1(1, 1) = SO
S2(1, 1) = SO

```

```

For i = 1 To T / h
S1(i + 1, 1) = S1(i, 1) + S1(i, 1) * r * h + S1(i, 1) * sigma * inkremente(i, 1)
Next i

'Falls MLMC, dann noch zweiten Payoff für summierte Inkremente berechnen
If methode = 1 Then
For i = 1 To T / h / M
S2(i + 1, 1) = S2(i, 1) + S2(i, 1) * r * h * M + S2(i, 1) * sigma * inkremente(i, 2)
Next i
End If

Else
S1(1, 1) = S0
For i = 1 To T / h
S1(i + 1, 1) = S1(i, 1) + S1(i, 1) * r * h + S1(i, 1) * sigma * inkremente(i, 1)
Next i

End If

'Zweiten Pfad für Delta erstellen (aber mit gleichen Zufallszahlen)
If optionswahl = 7 Or optionswahl = 8 Then

If l > 0 Then

S1(1, 2) = D0
S2(1, 2) = D0

For i = 1 To T / h
S1(i + 1, 2) = S1(i, 2) + S1(i, 2) * r * h + S1(i, 2) * sigma * inkremente(i, 1)
Next i

If methode = 1 Then
For i = 1 To T / h / M
S2(i + 1, 2) = S2(i, 2) + S2(i, 2) * r * h * M + S2(i, 2) * sigma * inkremente(i, 2)
Next i
End If

Else
S1(1, 2) = D0
For i = 1 To T / h
S1(i + 1, 2) = S1(i, 2) + S1(i, 2) * r * h + S1(i, 2) * sigma * inkremente(i, 1)
Next i
End If

End If

'erstelle Matrix mit Payoffs
Call PayoffBerechnen(optionswahl, methode, l, S1, S2, J, h)

'ein Sample wurde erstellt
Next J

'Varianzen bestimmen (variable "zahl" aus Formatgründen)
zahl = Anzahl(1, l + 1)
Variance(1, l + 1) = Varianz(Differenz, l + 1, zahl)

```

```

'optimales NI für alle l für MLMC
If methode = 1 Then
For k = 0 To l
NN = 0

For i = 0 To l
NN = NN + (Variance(1, i + 1) / (M ^ (-i) * T)) ^ (0.5)
Next i
NN = 2 * eps ^ (-2) * (Variance(1, k + 1) * (M ^ (-k) * T)) ^ (0.5) * NN

'aufrunden
If NN > Round(NN, 0) Then
NN = Round(NN, 0) + 1
Else
NN = Round(NN, 0)
End If

Anzahl(2, k + 1) = NN
NIVector(1, k + 1) = NN

'merke Anzahl der Samples für den Schritt und Anzahl der neuen Samples
If Anzahl(2, k + 1) > Anzahl(1, k + 1) Then

If Anzahl(2, k + 1) > maxanzahl Then
Vector(1, k + 1) = maxanzahl - Anzahl(1, k + 1)
Anzahl(1, k + 1) = maxanzahl
Else
Vector(1, k + 1) = Anzahl(2, k + 1) - Anzahl(1, k + 1)
Anzahl(1, k + 1) = Anzahl(2, k + 1)
End If
Else
Vector(1, k + 1) = 0
End If

Next k

'Optimales NI für MC
ElseIf methode = 2 Then

NN = Variance(1, l + 1) * 2 / (eps ^ 2)

If NN > Round(NN, 0) Then
NN = Round(NN, 0) + 1
Else
NN = Round(NN, 0)
End If
Anzahl(2, l + 1) = NN
NIVector(1, l + 1) = NN

If Anzahl(2, l + 1) > Anzahl(1, l + 1) Then

If Anzahl(2, l + 1) > maxanzahl Then
Vector(1, l + 1) = maxanzahl - Anzahl(1, l + 1)
Anzahl(1, l + 1) = maxanzahl
Else
Vector(1, l + 1) = Anzahl(2, l + 1) - Anzahl(1, l + 1)

```

```
Anzahl(1, l + 1) = Anzahl(2, l + 1)
End If
```

```
Else
Vector(1, l + 1) = 0
End If
```

```
End If
```

```
'erstelle restliche Samples
'bei MLMC für alle lll, bei MC nur für das gegenwärtige lll
If methode = 1 Then
start = 0
ElseIf methode = 2 Then
start = 1
End If
```

```
For lll = start To 1
```

```
If Vector(1, lll + 1) > 0 Then
```

```
h = M ^ (-lll) * T
```

```
For J = 1 + Anzahl(1, 1 + lll) - Vector(1, 1 + lll) To Anzahl(1, 1 + lll)
```

```
ReDim inkremente(T / h, 2)
ReDim S1(T / h + 1, 2)
ReDim S2(T / h + 1, 2)
```

```
'erstelle Vektor mi T/h Zufallszahlen
If lll > 0 Then
For i = 1 To T / h
num = Application.WorksheetFunction.NormSInv(Rnd)
inkremente(i, 1) = num * h ^ (0.5)
Next i
```

```
'Summiere Inkremente zu Gruppen der Größe M --> inkremente für P(l-1)
If methode = 1 Then
For i = 1 To T / h / M
For k = 1 To M
inkremente(i, 2) = inkremente(i, 2) + inkremente(M * (i - 1) + k, 1)
Next k
Next i
End If
Else
num = Application.WorksheetFunction.NormSInv(Rnd)
inkremente(1, 1) = num * h ^ (0.5)
End If
```

```
'erstelle Pfad der Aktie (2 Pfade da im Falle l=1,2.... zwei Payoffs berechnet werden)
If lll > 0 Then
```

```
S1(1, 1) = SO
S2(1, 1) = SO
For i = 1 To T / h
```

```
S1(i + 1, 1) = S1(i, 1) + S1(i, 1) * r * h + S1(i, 1) * sigma * inkremente(i, 1)
Next i
```

```
If methode = 1 Then
For i = 1 To T / h / M
S2(i + 1, 1) = S2(i, 1) + S2(i, 1) * r * h * M + S2(i, 1) * sigma * inkremente(i, 2)
Next i
End If
Else
S1(1, 1) = SO
For i = 1 To T / h
S1(i + 1, 1) = S1(i, 1) + S1(i, 1) * r * h + S1(i, 1) * sigma * inkremente(i, 1)
Next i
End If
```

```
If optionswahl = 7 Or optionswahl = 8 Then
If lll > 0 Then
S1(1, 2) = D0
S2(1, 2) = D0
For i = 1 To T / h
S1(i + 1, 2) = S1(i, 2) + S1(i, 2) * r * h + S1(i, 2) * sigma * inkremente(i, 1)
Next i
```

```
If methode = 1 Then
For i = 1 To T / h / M
S2(i + 1, 2) = S2(i, 2) + S2(i, 2) * r * h * M + S2(i, 2) * sigma * inkremente(i, 2)
Next i
End If
Else
S1(1, 2) = D0
For i = 1 To T / h
S1(i + 1, 2) = S1(i, 2) + S1(i, 2) * r * h + S1(i, 2) * sigma * inkremente(i, 1)
Next i
End If
```

```
End If
```

```
'erstelle Matrix mit Payoffs
Call PayoffBerechnen(optionswahl, methode, lll, S1, S2, J, h)
```

```
'ein Sample erstellt
Next J
```

```
'Varianzen bestimmen
zahl = Anzahl(1, lll + 1)
Variance(1, lll + 1) = Varianz(Differenz, lll + 1, zahl)
```

```
End If
Next lll
```

```
'Erwartungswerte der Samples
For i = 0 To 1
For J = 1 To Anzahl(1, i + 1)
Erwartung(1, i + 1) = Erwartung(1, i + 1) + Differenz(i + 1, J)
Next J
Erwartung(1, i + 1) = Erwartung(1, i + 1) / Anzahl(1, i + 1)
```

Next i

'Konvergenzbedingung1

If erweiterung = 1 Then

If l >= 2 Then

If methode = 1 Then

var1 = max(Abs(Erwartung(1, l)) / M, Abs(Erwartung(1, l + 1)))

ElseIf methode = 2 Then

var1 = max(Abs(Erwartung(1, l) - Erwartung(1, l - 1)) / M, Abs(Erwartung(1, l + 1) - Erwartung(1, l)))

End If

var2 = 1 / (2 ^ 0.5) \* (M - 1) \* eps

If var1 < var2 Then

zahlen = l

l = LL

End If

End If

End If

'Konvergenzbedingung2

If erweiterung = 2 Then

If l >= 2 Then

If methode = 1 Then

var1 = Abs(Erwartung(1, l + 1) - Erwartung(1, l)) / M

ElseIf methode = 2 Then

var1 = Abs((Erwartung(1, l + 1) - Erwartung(1, l)) - (Erwartung(1, l) - Erwartung(1, l - 1))) / M

End If

var2 = 1 / (2 ^ 0.5) \* ((M ^ 2) - 1) \* eps

If var1 < var2 Then

'Abbruch

'MsgBox ("abbruch")

zahlen = l

l = LL

End If

End If

End If

'Ende äußere Schleife

Next l

'Ergebnis und MSE

If zahlen > 0 Then

Else

zahlen = l - 1

End If

If methode = 1 Then

```

summe = 0
For i = 0 To zahlen
summe = summe + Erwartung(1, i + 1)
Next i
If erweiterung = 2 Then
summe = summe + (M - 1) ^ (-1) * Erwartung(1, zahlen + 1)
End If
Sheets("MC").Cells(14, 2) = summe

```

```

ElseIf methode = 2 Then
summe = 0
summe2 = 0
For i = 0 To zahlen
summe2 = summe2 + Anzahl(1, i + 1)
Next i
If erweiterung = 1 Then
For i = 0 To zahlen
summe = summe + Erwartung(1, i + 1) * Anzahl(1, i + 1)
Next i
End If

```

```

'richardson für MLMC
If erweiterung = 2 Then
For i = 1 To zahlen
summe = summe + Anzahl(1, i + 1) * (Erwartung(1, i + 1) - Erwartung(1, i) / M)
Next i
summe = summe * M / (M - 1)
summe = summe + Anzahl(1, 1) * Erwartung(1, 1)
End If
Sheets("MC").Cells(14, 2) = summe / summe2
End If

```

```

'MSE
VarMSE = 0
For i = 1 To zahlen
VarMSE = VarMSE + Variance(1, i) / Anzahl(1, i)
Next i
If methode = 1 Then
MSE = VarMSE + (Erwartung(1, zahlen + 1) / (M - 1)) ^ 2
ElseIf methode = 2 Then
MSE = VarMSE + (Erwartung(1, zahlen + 1) / (M ^ 2 - 1)) ^ 2
End If
Cells(15, 2) = MSE
Cells(18, 2) = zahlen

```

```

'Grafik 1 (Varianz Payoffs)
zahl = Anzahl(1, 1)
Cells(2, 9) = Varianz(Payoff, 1, zahl)
For i = 1 To zahlen
Cells(i + 2, 10) = Variance(1, i + 1)
zahl = Anzahl(1, 1 + i)
Cells(i + 2, 9) = Varianz(Payoff, 2 * i, zahl)
Next i

```

```

'Grafik 2 (Erwartung Payoffs)
Cells(2, 11) = Erwartung(1, 1)
For i = 1 To zahlen
Cells(i + 2, 12) = Erwartung(1, i + 1)
zahl = Anzahl(1, 1 + i)
summe = 0
For J = 1 To zahl
summe = summe + Payoff(2 * i, J)
Next J
Cells(i + 2, 11) = summe / zahl
Next i

```

```

'Grafik 3 (NI)
For i = 0 To zahlen
Cells(i + 2, 14) = NIVector(1, i + 1)
Next i

```

```

'Grafik 4 (Computational Cost)
C = 0
If methode = 1 Then
C = NIVector(1, 1)
For i = 1 To zahlen
C = C + NIVector(1, i + 1) * (M ^ i + M ^ (i - 1))
Next i
ElseIf methode = 2 Then
For i = 0 To zahlen
C = C + NIVector(1, i + 1) * M ^ i
Next i
End If
If optionswahl = 7 Or optionswahl = 8 Then
C = 2 * C
End If
Cells(16, 2) = C

```

End Sub

---

Function Varianz(Matrix As Variant, Zeile As Long, Laenge As Long) As Double

```

Dim i As Long
Dim Mittelwert As Double
Mittelwert = 0
Varianz = 0
For i = 1 To Laenge
Mittelwert = Mittelwert + Matrix(Zeile, i)
Next i
Mittelwert = Mittelwert / Laenge
For i = 1 To Laenge
Varianz = (Matrix(Zeile, i) - Mittelwert) ^ 2 + Varianz
Next i
Varianz = Varianz / (Laenge - 1)

```

End Function



---

Function PayoffEuler(hh As Double, SS As Variant, KK As Double) As Double

If SS(T / hh + 1, 1) > KK Then  
PayoffEuler = (SS(T / hh + 1, 1) - KK) \* Exp(-1 \* r \* T)  
Else  
PayoffEuler = 0  
End If

End Function

---

Function PayoffAsian(hh As Double, SS As Variant, KK As Double) As Double

Dim Mittelwert As Double  
Dim N, i As Long  
Mittelwert = 0  
N = T / hh  
For i = 1 To N  
Mittelwert = Mittelwert + hh \* 0.5 \* (SS(i + 1, 1) + SS(i, 1))  
Next i  
If Mittelwert > KK Then  
PayoffAsian = Exp(-1 \* r \* T) \* (Mittelwert - KK)  
Else  
PayoffAsian = 0  
End If

End Function

---

Function PayoffLookback(hh As Double, SS As Variant, KK As Double) As Double

Dim minimum, beta As Double  
Dim i As Long  
beta = 0.5826  
minimum = SO  
For i = 1 To T / hh  
If SS(i \* h + 1, 1) < minimum Then  
SS(i \* h + 1, 1) = minimum  
End If  
Next i  
minimum = minimum \* (1 - beta \* sigma \* hh ^ (0.5))  
  
PayoffLookback = (SS(T / hh + 1, 1) - minimum) \* Exp(-1 \* r \* T)  
End Function

---

Function PayoffDigital(hh As Double, SS As Variant, KK As Double) As Double

If SS(T / hh + 1, 1) > KK Then  
PayoffDigital = 1 \* Exp(-1 \* r \* T)  
Else  
PayoffDigital = 0  
End If

End Function

---

Function PayoffDelta(hh As Double, SS As Variant, KK As Double) As Double

If SS(T / hh + 1, 1) > KK Then  
PayoffDelta = (SS(T / hh + 1, 1) / SO) \* Exp(-1 \* r \* T)  
Else  
PayoffDelta = 0  
End If

End Function

---

Function PayoffDeltaAsian(hh As Double, SS As Variant, KK As Double) As Double

Dim Mittelwert As Double  
Dim N, i As Long  
Mittelwert = 0  
N = T / hh  
For i = 1 To N  
Mittelwert = Mittelwert + hh \* 0.5 \* (SS(i + 1, 1) + SS(i, 1))  
Next i  
If Mittelwert > KK Then  
PayoffDeltaAsian = Exp(-1 \* r \* T) \* Mittelwert / SO  
Else  
PayoffDeltaAsian = 0  
End If

End Function

---

Function PayoffDelta2(hh As Double, SS As Variant, KK As Double) As Double

If SS(T / hh + 1, 1) > KK Then

```
PayoffDelta2 = SS(T / hh + 1, 2) * Exp(-1 * r * T)
Else
PayoffDelta2 = 0
End If
```

```
End Function
```

---

```
Function PayoffDelta2Asian(hh As Double, SS As Variant, KK As Double) As Double
```

```
Dim Mittelwert1, Mittelwert2 As Double
Dim N, i As Long
Mittelwert1 = 0
Mittelwert2 = 0
N = T / hh
For i = 1 To N
Mittelwert1 = Mittelwert1 + hh * 0.5 * (SS(i + 1, 1) + SS(i, 1))
Mittelwert2 = Mittelwert2 + hh * 0.5 * (SS(i + 1, 2) + SS(i, 2))
Next i
If Mittelwert1 > KK Then
PayoffDeltaAsian = Exp(-1 * r * T) * Mittelwert2
Else
PayoffDeltaAsian = 0
End If
```

```
End Function
```

---

```
Function max(ByVal x As Double, ByVal y As Double) As Double
```

```
    If x > y Then
        max = x
    Else
        max = y
    End If
```

```
End Function
```

---

```
Sub PayoffBerechnen(op As Integer, meth As Integer, laeng As Long, SS1 As Variant, SS2 As Variant, JJ As Long, hh As Double)
```

```
'Payoffs für MLMC
```

```
If meth = 1 Then
```

```
If op = 1 Then
```

```
If laeng > 0 Then
```

```
Payoff(2 * laeng, JJ) = PayoffEuler(hh, SS1, Strike)
```

```
Payoff(2 * laeng + 1, JJ) = PayoffEuler(hh * M, SS2, Strike)
```

Differenz(laeng + 1, JJ) = Payoff(2 \* laeng, JJ) - Payoff(2 \* laeng + 1, JJ)  
Else  
Payoff(1, JJ) = PayoffEuler(hh, SS1, Strike)  
Differenz(laeng + 1, JJ) = Payoff(1, JJ)  
End If

ElseIf op = 2 Then  
If laeng > 0 Then  
Payoff(2 \* laeng, JJ) = PayoffAsian(hh, SS1, Strike)  
Payoff(2 \* laeng + 1, JJ) = PayoffAsian(hh \* M, SS2, Strike)  
Differenz(laeng + 1, JJ) = Payoff(2 \* laeng, JJ) - Payoff(2 \* laeng + 1, JJ)  
Else  
Payoff(1, JJ) = PayoffAsian(hh, SS1, Strike)  
Differenz(laeng + 1, JJ) = Payoff(1, JJ)  
End If

ElseIf op = 3 Then  
If laeng > 0 Then  
Payoff(2 \* laeng, JJ) = PayoffLookback(hh, SS1, Strike)  
Payoff(2 \* laeng + 1, JJ) = PayoffLookback(hh \* M, SS2, Strike)  
Differenz(laeng + 1, JJ) = Payoff(2 \* laeng, JJ) - Payoff(2 \* laeng + 1, JJ)  
Else  
Payoff(1, JJ) = PayoffLookback(hh, SS1, Strike)  
Differenz(laeng + 1, JJ) = Payoff(1, JJ)  
End If

ElseIf op = 4 Then  
If laeng > 0 Then  
Payoff(2 \* laeng, JJ) = PayoffDigital(hh, SS1, Strike)  
Payoff(2 \* laeng + 1, JJ) = PayoffDigital(hh \* M, SS2, Strike)  
Differenz(laeng + 1, JJ) = Payoff(2 \* laeng, JJ) - Payoff(2 \* laeng + 1, JJ)  
Else  
Payoff(1, JJ) = PayoffDigital(hh, SS1, Strike)  
Differenz(laeng + 1, JJ) = Payoff(1, JJ)  
End If

ElseIf op = 5 Then  
If laeng > 0 Then  
Payoff(2 \* laeng, JJ) = PayoffDelta(hh, SS1, Strike)  
Payoff(2 \* laeng + 1, JJ) = PayoffDelta(hh \* M, SS2, Strike)  
Differenz(laeng + 1, JJ) = Payoff(2 \* laeng, JJ) - Payoff(2 \* laeng + 1, JJ)  
Else  
Payoff(1, JJ) = PayoffDelta(hh, SS1, Strike)  
Differenz(laeng + 1, JJ) = Payoff(1, JJ)  
End If

ElseIf op = 6 Then  
If laeng > 0 Then  
Payoff(2 \* laeng, JJ) = PayoffDeltaAsian(hh, SS1, Strike)  
Payoff(2 \* laeng + 1, JJ) = PayoffDeltaAsian(hh \* M, SS2, Strike)  
Differenz(laeng + 1, JJ) = Payoff(2 \* laeng, JJ) - Payoff(2 \* laeng + 1, JJ)  
Else  
Payoff(1, JJ) = PayoffDeltaAsian(hh, SS1, Strike)  
Differenz(laeng + 1, JJ) = Payoff(1, JJ)  
End If

```

ElseIf op = 7 Then
If laeng > 0 Then
Payoff(2 * laeng, JJ) = PayoffDelta2(hh, SS1, Strike)
Payoff(2 * laeng + 1, JJ) = PayoffDelta2(hh * M, SS2, Strike)
Differenz(laeng + 1, JJ) = Payoff(2 * laeng, JJ) - Payoff(2 * laeng + 1, JJ)
Else
Payoff(1, JJ) = PayoffDelta2(hh, SS1, Strike)
Differenz(laeng + 1, JJ) = Payoff(1, JJ)
End If

```

```

ElseIf op = 8 Then
If laeng > 0 Then
Payoff(2 * laeng, JJ) = PayoffDelta2Asian(hh, SS1, Strike)
Payoff(2 * laeng + 1, JJ) = PayoffDelta2Asian(hh * M, SS2, Strike)
Differenz(laeng + 1, JJ) = Payoff(2 * laeng, JJ) - Payoff(2 * laeng + 1, JJ)
Else
Payoff(1, JJ) = PayoffDelta2Asian(hh, SS1, Strike)
Differenz(laeng + 1, JJ) = Payoff(1, JJ)
End If
End If

```

```

'Payoffs für MC
ElseIf meth = 2 Then
If op = 1 Then
Differenz(laeng + 1, JJ) = PayoffEuler(hh, SS1, Strike)
ElseIf op = 2 Then
Differenz(laeng + 1, JJ) = PayoffAsian(hh, SS1, Strike)
ElseIf op = 3 Then
Differenz(laeng + 1, JJ) = PayoffLookback(hh, SS1, Strike)
ElseIf op = 4 Then
Differenz(laeng + 1, JJ) = PayoffDigital(hh, SS1, Strike)
ElseIf op = 5 Then
Differenz(laeng + 1, JJ) = PayoffDelta(hh, SS1, Strike)
ElseIf op = 6 Then
Differenz(laeng + 1, JJ) = PayoffDeltaAsian(hh, SS1, Strike)
ElseIf op = 7 Then
Differenz(laeng + 1, JJ) = PayoffDelta2(hh, SS1, Strike)
ElseIf op = 8 Then
Differenz(laeng + 1, JJ) = PayoffDelta2Asian(hh, SS1, Strike)
End If

```

End If

End Sub

# Literaturverzeichnis

- [1] Bally, V.; Talay, D.: *The law of the Euler scheme for stochastic differential equations, I: convergence rate of the distribution function*, Probability Theory and Related Fields, 104(1):43-60, 1995.
- [2] Bennet, Colin; Sharpley, Robert: *Interpolation of Operators*, Academic Press, 1988.
- [3] Cambanis, Stamatis; Hu, Yaozhong: *Exact Convergence Rate of the Euler-Maruyama Scheme, with Application to Sampling Design*, Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes, Volume 59, Issue 3 and 4, pp. 211-240, 1996.
- [4] Avikainen, Rainer: *Convergence Rates for Approximations of Functionals of SDEs*. arXiv:0712.3626v1 [math.PR], 12/2007.
- [5] Avikainen, Rainer: *On Irregular Functionals of SDEs and the Euler Scheme*, Finance and Stochastics, Vol. 13, No. 3, pp. 381-401, 2009.
- [6] Giles, Michael B.: *Multilevel Monte Carlo path simulation*, Operations Research, Vol. 56, No. 3, pp. 607-617, 2008.
- [7] Giles, Michael B.: *Improved multilevel Monte Carlo convergence using the Milstein scheme*, In: Keller, Alexander; Heinrich, Stefan; Niederreiter, Harald: *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2006*, Springer, Berlin, 2008.
- [8] Glassermann, Paul: *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer, New York, 2004.
- [9] Guyon, Julien: *Euler Scheme and Tempered Distributions*, Stochastic Processes Appl. 116, No. 6, 877-904, 2006.

- [10] Hull, John C.: *Options, Futures and Other Derivatives*, Pearson Prentice Hall, 6th edition, New Jersey, 2005.
- [11] Karatzas, Ioannis; Shreve, Steven E.: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, New York, 1988.
- [12] Klenke, Achim.: *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer, Berlin, 2006.
- [13] Kloeden, Peter E.: *Skript zur Vorlesung: Numerik stochastischer Differenzialgleichungen*, Vorlesungsskript, Frankfurt, 2007.
- [14] Kloeden, Peter E.; Platen, Eckhard: *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer, 2nd ed. corr. print., Berlin, 1995.
- [15] Königsberger, Konrad: *Analysis 2*, Springer, 5. Auflage, Berlin, 2004.
- [16] Neininger, Ralph: *Höhere Stochastik*, Vorlesungsskript, Frankfurt, 2007.
- [17] Rudin, W.: *Real and Complex Analysis, Second Edition*, 1966, 1974.
- [18] Schmidli, Hanspeter: *Wahrscheinlichkeitstheorie I*, Vorlesungsskript, Köln, 2009.  
URL: <http://www.mi.uni-koeln.de/~schmidli/vorl/Stoch1/mart.pdf> (abgerufen 15. Oktober 2009)