



Fachbereich Informatik und Mathematik  
Institut für Mathematik, Schwerpunkt Numerische Analysis

# Sprung-Diffusions-Modelle zur Bewertung Europäischer Optionen

**Bachelorarbeit**  
im Fach Mathematik  
angefertigt bei Prof. Dr. Thomas Gerstner

Ouaali Nouredine

18. September 2011

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Sprung-Diffusions-Modelle</b>	<b>3</b>
2.1	Merton Modell . . . . .	4
2.1.1	Die Annahmen . . . . .	4
2.1.2	Beschreibung des Modells . . . . .	5
2.1.3	Eine Optionspreisformel . . . . .	5
2.2	Kou Modell . . . . .	6
2.2.1	Beschreibung des Modells . . . . .	6
2.2.2	Eine Optionspreisformel . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Geschlossene Lösungen</b>	<b>7</b>
3.1	Merton Modell . . . . .	7
3.1.1	Plötzlicher Ruin . . . . .	9
3.1.2	Lognormalverteilte Sprünge . . . . .	10
3.2	Kou-Modell . . . . .	13
3.2.1	analytische Lösung . . . . .	13
3.2.2	Herleitung der expliziten Formel . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Monte Carlo Simulation</b>	<b>18</b>
4.1	Monte-Carlo-Simulation für das Merton- und Kou-Modell . . . . .	19
4.1.1	Simulation an festen Zeitpunkten $t_i$ . . . . .	21
4.1.2	Simulation der Sprungzeiten . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Numerische Ergebnisse</b>	<b>24</b>
5.1	Geschlossene Lösungen . . . . .	25
5.1.1	Plötzlicher Ruin . . . . .	25
5.1.2	Lognormalverteilung . . . . .	26
5.1.3	Kou Modell . . . . .	27
5.1.4	Put-Call Tabelle für Merton und Kou-Modell . . . . .	27
5.2	Monte-Carlo-Verfahren . . . . .	29
<b>6</b>	<b>Fazit</b>	<b>32</b>

## **Eidesstattliche Erklärung**

Ich versichere, die Bachelorarbeit selbständig und lediglich unter Benutzung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst zu haben.

Ich erkläre weiterhin, dass die vorliegende Arbeit noch nicht im Rahmen eines anderen Prüfungsverfahrens eingereicht wurde.

## **Danksagungen**

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die das Entstehen dieser Arbeit möglich gemacht haben. Mein besonderer Dank gilt dabei Prof. Dr. Thomas Gerstner für die Überlassung des Themas und die gute Betreuung, sowie Stefan Heinz für die Unterstützungen bei der Entwicklung dieser Arbeit.

# 1 Einleitung

Die Bewertung derivativer Finanzinstrumente kann näherungsweise mit Hilfe mathematischer Modelle wie z.B. Differentialgleichungen oder Integro-Differentialgleichungen durchgeführt werden. Da diese Integro-Differentialgleichungen nur in seltenen Fällen eine analytische Lösung besitzen, bedienen wir uns numerischer Verfahren, die uns zukünftige Entwicklungen simulieren und Lösungen dieser Modelle berechnen. Wir werden uns in dieser Arbeit mit der Bewertung von europäischen Optionen mittels Merton- und Kou-Modellen befassen.

Black und Scholes [2] stellten fest, dass der faire Preis einer europäischen Option durch die Lösung einer speziellen partiellen Differentialgleichung (PDE) gegeben ist. Sie nahmen an, dass der Kurs des Wertpapiers, welches der Option zugrunde liegt, einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt. Die geometrische Brownsche Bewegung ermöglicht es aber nicht, dass alle Eigenschaften eines Aktienkurses berücksichtigt werden. Insbesondere werden unter Verwendung einer Brownschen Bewegung, Sprünge im Kursverlauf des Wertpapiers nicht berücksichtigt. Ein Alternativer Ansatz der Kursmodellierung, in dem die Nachteile der Brownschen Bewegung nicht weiter auftreten, ist die Verwendung von Sprung-Diffusions-Modellen. Eine erste Erweiterung dieses Modells stellte die Arbeit von Merton [8] dar. Er nahm darin an, dass sich der Kurs der Aktie aus einer stetigen Komponente und einer Sprungkomponente zusammensetzt. Dies führte dazu, dass zur Bewertung einer Option eine partielle Integro-Differentialgleichung (PIDE) gelöst werden kann. Der Grund dafür ist, dass die Sprungkomponente im Merton-Modell durch einen zusammengesetzten Poisson-Prozess, dessen Sprungintensitäten lognormalverteilt sind, modelliert wird. Ausgehend vom Merton-Modell sind in den letzten Jahren diverse Modelle entstanden, die man in der Klasse der Sprung-Diffusions-Prozesse zusammenfasst. Interessant für diese Arbeit ist hierbei das Kou-Modell [4], das zu der genannten Klasse gehört. Im Gegensatz zu Merton geht Kou davon aus, dass die Sprünge des Wertpapiers nicht lognormalverteilt sind, sondern einer Doppelexponentialverteilung folgen. Motiviert davon werden wir beide Modelle vorstellen. Erwähnenswert dabei ist, dass das Merton-Modell geschlossene Lösungen in zwei Fällen liefert. Zum einen der plötzliche Ruin und zum anderen lognormalverteilte Sprünge. Das Kou-Modell hingegen, hat eine geschlossene Lösung für doppelexponentialverteilte Sprünge.

Falls keine analytische Lösung existiert, muss man auf numerische Verfahren zur Bewertung europäischer Optionen zurückgreifen. In dieser Arbeit werden wir das Monte-Carlo-Verfahren zur Bewertung europäischer Optionen beschreiben und zu Vergleichszwecken einsetzen. Hierbei werden die Kursbewegungen für die Laufzeit der Option explizit simuliert, durch eine Wiederholung dieser Simulation und der Bestimmung eines Mittelwertes für den Kurspreis am Ende der Laufzeit kann schließlich ebenfalls der Optionspreis bestimmt werden. In unserem Fall werden wir das Monte-Carlo-Verfahren auf die bereits erwähnten Sprungverteilungsfunktionen anwenden, wobei wir die Konvergenz gegen die geschlossene Lösung für beide Modelle beobachten werden. Ein Problem, das bei der Verwendung des Monte-Carlo-Verfahrens auftritt, ist die Ziehung von

Zufallszahlen, die einer speziellen Verteilung zugrunde liegen. Um diese Zufallszahlen zu erhalten, muss die Berechnung der inversen Verteilungsfunktion möglich sein. Diese sind im Allgemeinen jedoch schwer zu berechnen. Bekannt sind nur Verfahren zur Bestimmung normalverteilter, lognormalverteilter und doppel exponentialverteilter Zufallszahlen, die in dieser Arbeit verwendet werden.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich wie folgt:

Kapitel 2 befasst sich mit den verschiedenen Modellen zur Bewertung europäischer Optionen. Zu Beginn wird kurz die Sprung-Diffusions-Modelle vorgestellt. Danach betrachten wir das Merton-Modell und Kou-Modell, für diese Modelle werden dann die Annahmen und die partielle Integro-Differentialgleichungen zur Berechnung des fairen Optionspreises dargestellt. In Kapitel 3 werden wir die Existenz geschlossener Lösungen für die bereits vorgestellten Modelle zeigen. Wobei wir Spezialfälle (plötzlicher Ruin, lognormalverteilte Sprünge) des Merton-Modells und doppel exponentialverteilte Sprünge im Fall von Kou, betrachten. In Kapitel 4 wird das Monte-Carlo-Verfahren zur Bestimmung des Optionspreises auf die jeweiligen Modelle vorgestellt und angewendet. In Kapitel 5 werden die Ergebnisse der geschlossenen Lösung für den Fall des plötzlichen Ruins, den Fall der Lognormalverteilung und den Fall der Doppel exponentialverteilung diskutiert. Abschließend wird das Monte-Carlo-Verfahren hinsichtlich seiner Konvergenz gegen die geschlossene Lösung untersucht. In Kapitel 6 geben wir eine Zusammenfassung dieser Arbeit.

## 2 Sprung-Diffusions-Modelle

Sprung-Diffusions-Modell besteht aus zwei Komponenten, dem Sprung- und dem Diffusionsteil. Die Diffusionskomponente besteht aus einer normalen Brownschen Bewegung. Die zweite Komponente, der Sprung-Teil, besteht aus einer Impuls- und einer Verteilungsfunktion. Die Impulsfunktion gibt den Anstoß für eine Kursänderung, deren Größe durch die Verteilungsfunktion bestimmt wird. Der Sprung-Teil ermöglicht es, plötzliche und unerwartete Kursänderungen zu modellieren.

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) + \eta S(t)dN(t), \quad (1)$$

wobei  $N(t)$  ein Poisson-Prozess mit Intensität  $\lambda$  ist und  $\eta$  eine Impulsfunktion, die einen Sprung von  $S$  nach  $S(1 + \eta)$  bewirkt.

### Einige Beispiele:

- normalverteilt (Merton, 1976):  $\eta(x) = N(\mu, \sigma)$
- Doppel-Exponential-Verteilung (Kou-Modell)  $\eta(x) = p\eta_1 e^{-\eta_1 x} 1_{\{x \geq 0\}} + q\eta_2 e^{\eta_2 x} 1_{\{x < 0\}}$
- Gamma:  $\eta(x) = C \frac{e^{-Mx}}{|x|}$
- Varianz-Gamma (Dilib, Eugene 1990):  $\eta(x) = \begin{cases} C \frac{e^{Gx}}{-x} & x < 0 \\ C \frac{e^{-Mx}}{x} & x > 0 \end{cases}$
- CGMY (Carr, Geman, Madan, Yor 2002):  $\eta(x) = \begin{cases} C \frac{e^{Gx}}{(-x)^{1+Y}} & x < 0 \\ C \frac{e^{-Mx}}{x^{1+Y}} & x > 0 \end{cases}$

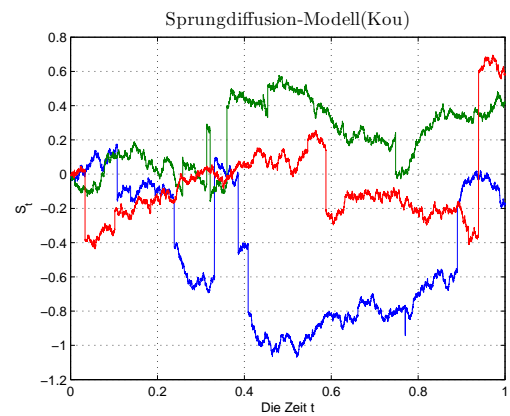
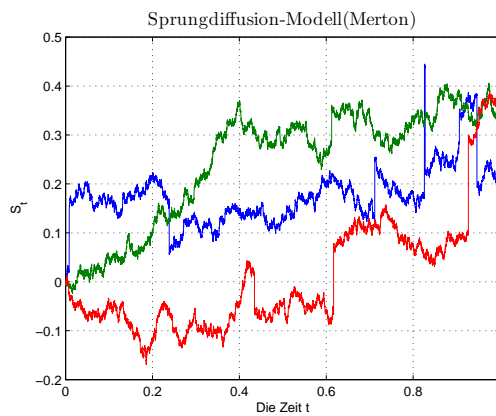


Abbildung 1: links Zufallspfade des Merton-Modells mit folgenden Parametern ( $\lambda = 3.45; \mu_J = 0.01; \sigma_J = 0.2$ ) und Rechts Zufallspfade des Kou-Modells mit folgenden Parametern ( $\lambda = 9.2; p = 0.5; \eta_1 = 0.2; \eta_2 = 0.2$ ).

## 2.1 Merton Modell

Die Arbeiten von Black und Scholes führten zu einem großen Durchbruch im Bereich der Optionspreisberechnungen und des Optionshandels. Ihre Arbeit basiert auf der Annahme, dass der Kurs des Wertpapiers, welches der Option zugrunde liegt, einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt. Allerdings ist es nicht möglich, durch eine geometrische Brownsche Bewegung alle Eigenschaften eines Aktienkurses wiederzugeben. Insbesondere Sprünge im Kursverlauf des Wertpapiers können durch Verwendung einer Brownschen Bewegung nur unzureichend dargestellt werden. Merton hat in [8] ein Modell entwickelt, in dem die Aktienkursdynamik durch einen Sprung-Diffusions-Prozess modelliert wird.

### 2.1.1 Die Annahmen

1. Der risikolose Zinssatz  $r$  ist bekannt und konstant über die Zeit.
2. Es gibt keine Transaktionskosten oder Steuern.
3. Es gibt keine Arbitragemöglichkeiten.
4. Es gibt keine Dividendenzahlungen.
5. Der Aktienkurs  $S(t)$  folgt einem Prozess, der durch die stochastische Differentialgleichung

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (\alpha - \lambda\kappa)dt + \sigma dW(t) + dq(t) \quad (2)$$

bestimmt wird. Hierbei bezeichnet  $\alpha$  der erwartete Aktienertrag (Aktienrendite) und  $\sigma^2$  die Varianz von  $S$ . Der Standard Wiener Prozess  $W(t)$  ist unabhängig vom Poisson-Prozess  $q(t)$ . Die Wahrscheinlichkeiten dieses Prozesses lassen sich beschreiben als:

$$P(\text{Das Ereignis tritt nicht im Intervall } [t, t+h] \text{ auf}) = 1 - \lambda h \quad (3)$$

$$P(\text{Das Ereignis tritt im Intervall } [t, t+h] \text{ auf}) = \lambda h.$$

Dabei ist  $\lambda$  die durchschnittliche Anzahl der Ereignisse pro Zeiteinheit und

$$\kappa = E[Y - 1] = E[Y] - 1,$$

wobei  $(Y - 1)$  die prozentuale Veränderung des Preises ist, falls das Poisson-Ereignis eintritt. Der Erwartungswertoperator über die Zufallsvariable  $Y$  wird mit  $E[\cdot]$  bezeichnet.

### 2.1.2 Beschreibung des Modells

Die Gesamtdynamik des Aktienkurses setzt sich aus zwei Komponenten zusammen. Zum einen gibt es die normalen Preisschwankungen, dieser Part der Dynamik wird durch eine Standard geometrische Brownsche Bewegung dargestellt. Zum anderen gibt es die Veränderungen im Preis, die durch wichtige neue Informationen hervorgerufen werden. Diese Komponente des Preises wird durch einen Poisson Prozess beschrieben. Falls ein Poisson-Ereignis eintritt, beschreibt die Zufallsvariable  $Y$  die Auswirkung des Ereignisses auf den Aktienkurs. Das heißt, wenn  $S(t)$  den Aktienkurs zum Zeitpunkt  $t$  widerspiegelt, ist der Kurs zum Zeitpunkt  $(t + h)$  gegeben durch  $S(t + h) = S(t)Y$ . Dabei wird vorausgesetzt, dass es sich bei der Zufallsvariable  $Y$  um eine Variable mit kompaktem Träger handelt und  $Y \geq 0$  gilt, und die Zufallsvariablen  $\{Y\}$  sind voneinander unabhängig. In (2.4) beschreibt also  $\sigma dW(t)$  die normalen marginalen Preisschwankungen und  $dq(t)$  die Preissprünge. Wählt man  $\lambda = 0$ , so erhält man die gleiche Formel wie im Black-Scholes-Modell. Wir können die Gleichung (2.2) daher umschreiben in

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \begin{cases} (\alpha - \lambda\kappa) dt + \sigma dW(t), & \text{falls das Poisson Ereignis nicht eintritt} \\ (\alpha - \lambda\kappa) dt + \sigma dW(t) + (Y - 1), & \text{falls das Poisson Ereignis eintritt,} \end{cases} \quad (4)$$

wobei mit Wahrscheinlichkeit 1 nur ein Poisson Ereignis an einem Zeitpunkt stattfindet. Der entstehende Pfad ist dann größtenteils kontinuierlich mit einigen diskreten Sprüngen, die unterschiedliche Vorzeichen und Größen aufweisen. Falls die Parameter  $\alpha, \lambda, \kappa$ , und  $\sigma$  konstant gewählt werden, kann man das Verhältnis von  $S(t)$  und  $S(0)$  wie folgt ausdrücken:

$$\frac{S(t)}{S(0)} = \exp\left(\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\kappa\right)t + \sigma W(t)\right) X(n), \quad (5)$$

$W(t)$  ist dabei eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz  $t$ ,  $X(n) = 1$  für  $n = 0$  und  $X(n) = \prod_{j=1}^n Y_j$  für  $n \geq 1$ , wobei die  $Y_j$  unabhängig und gleich verteilt sind. Die Anzahl  $n$  der Sprünge ist Poissonverteilt mit Parameter  $\lambda t$ .

### 2.1.3 Eine Optionspreisformel

Wenn der Kurs des zugrunde liegenden Wertpapiers der in (2.2) beschriebenen Dynamik folgt, ergibt sich für den Wert  $V$  einer entsprechenden Europäischen Option:

$$V_t = -\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} - (r - \lambda\alpha) S V_S + (r + \lambda) V - \lambda \int_{\mathbb{R}^+} V(Sy, t) g_Y(y) dy. \quad (6)$$

Siehe [6] und [7].



## 2.2 Kou Modell

Ein weiteres Modell zur Bewertung von Optionen ist das Modell von Kou [4]. Im Gegensatz zu Merton geht Kou davon aus, dass die Sprünge des Wertpapiers nicht lognormalverteilt sind, sondern einer Doppel-Exponential-Verteilung folgen. Die übrigen Marktannahmen bleiben erhalten, es ändert sich also nur die Modellierung des Aktienkurses.

### 2.2.1 Beschreibung des Modells

Der Kurs der Aktie wird bei dem Kou durch folgende stochastische partielle Differentialgleichung beschrieben

$$\frac{dS(t)}{S(t-)} = \mu dt + \sigma dW(t) + d \left( \sum_{i=1}^{N(t)} (V_i - 1) \right). \quad (7)$$

Hierbei entspricht, wie auch schon in den vorangegangenen Modellen  $\mu$  dem erwarteten Ertrag der Aktie und  $\sigma$  der Volatilität.  $W(t)$  ist eine Standard Brownsche Bewegung,  $N(t)$  ein Poisson Prozess mit Parameter  $\lambda$  und die  $\{V_i\}$  eine von nicht negativen unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen für die gilt, dass  $Y = \ln(V)$  eine asymmetrische Doppel-Exponential-Verteilung hat. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsvariablen  $Y$  ist gegeben durch

$$g_Y(x) = p\eta_1 e^{-\eta_1 x} 1_{\{x \geq 0\}} + q\eta_2 e^{\eta_2 x} 1_{\{x < 0\}} \quad (8)$$

$$\eta_1 > 0, \eta_2 > 0.$$

Es gilt weiterhin  $p, q \geq 0$ ,  $p + q = 1$ ,  $p$  und  $q$  repräsentieren die Wahrscheinlichkeiten für Aufwärts- bzw. Abwärtssprünge. Mit anderen Worten

$$\ln(V) = Y \stackrel{d}{=} \begin{cases} \zeta^+, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ -\zeta^-, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } q, \end{cases} \quad (9)$$

wobei  $\stackrel{d}{=}$  für identisch verteilt steht und  $\zeta^+$  und  $\zeta^-$  exponential verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert  $\frac{1}{\eta_1}$  bzw.  $\frac{1}{\eta_2}$  sind. In der Gleichung (2.7) sind alle Zufallsvariablen unabhängig, sowie aus Gründen der Vereinfachung wird der Driftterm  $\mu$  und der Volatilitätsterm  $\sigma$  als konstant angenommen.

Die Lösung der stochastischen Differentialgleichung (2.7) liefert uns die Dynamik des Wertpapierpreises

$$S(t) = S(0) \exp \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right) \prod_{i=1}^{N(t)} V_i, \quad (10)$$

Durch die Transformation  $X(t) = \log \left( \frac{S(t)}{S(0)} \right)$  ist

$$X(t) = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) + \sum_{i=1}^{N(t)} \log(V_i),$$

da  $Y_i = \ln(V_i)$ , dann ist

$$X(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t) + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad (11)$$

dabei gilt

$$\begin{aligned} E[Y] &= \frac{p}{\eta_1} - \frac{q}{\eta_2}, \\ \text{Var}[Y] &= qp\left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2}\right)^2 + \left(\frac{p}{\eta_1^2} + \frac{q}{\eta_2^2}\right), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} E[V] &= E[e^Y] \\ &= q\frac{\eta_2}{\eta_2 + 1} + p\frac{\eta_1}{\eta_1 - 1}, \quad \eta_1 > 1, \eta_2 > 0. \end{aligned} \quad (12)$$

### 2.2.2 Eine Optionspreisformel

Wenn der Kurs des zugrunde liegenden Wertpapiers der in (2.7) beschriebenen Dynamik folgt, ergibt sich für den Wert  $V$  einer entsprechenden Europäischen Option wie beim Merton-Modell die folgende PIDE

$$V_t = -\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} - (r - \lambda\alpha)SV_S + (r + \lambda)V - \lambda \int_{\mathbb{R}^+} V(Sy, t) g_Y(y) dy. \quad (13)$$

Siehe [9].

## 3 Geschlossene Lösungen

### 3.1 Merton Modell

Leider ist es im Gegensatz zur Black-Scholes-Gleichung nicht einmal für Europäische Optionen möglich, für die von Merton entwickelte PIDE eine allgemeine geschlossene Formel zur Lösung anzugeben, da das nicht-systematische Risiko des Sprungteils bei der Berechnung des fairen Preises berücksichtigt werden muss. Merton gibt zwei Spezialfälle an, in denen eine analytische Lösung gefunden werden kann. Im folgende Abschnitt, die aus [8] und [6] entnommen, werden die Lösungsformeln für diese beiden Fälle angegeben.

#### Satz

Der Preis einer Europäischen Call Option unter dem Merton Modell ist gegeben durch

$$V_C(S, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} \right] E_n \left[ BS_C(\tilde{S}_t X_n e^{-\lambda\kappa\tau}, \tau, K, \sigma^2, r) \right], \quad (14)$$

wobei  $\tilde{S}_t = S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau + \sigma W(\tau)}$ .

## Beweis

Nach Martingal Ansatz ist

$$V(S, t) = e^{-r\Delta t} E^*[V(S, t + \Delta t)],$$

wobei  $E^*$  die Erwartungswert unter dem äquivalenten Martingalmaß ist.

Somit ist der Preis für einen Call gegeben durch

$$V_C(S, t) = e^{-r\tau} E^*[(S_T - K)^+].$$

Nach dem Satz vom totalen Erwartungswert ist

$$\begin{aligned} V_C(S, t) &= e^{-r\tau} \sum_{n=0}^{\infty} P(n \text{ Sprünge}) E[(S_T - K)^+ | n \text{ Sprünge}] \\ &\stackrel{*}{=} e^{-r\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} \right] E \left[ (S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\kappa)\tau + \sigma W(\tau)} X_n - K)^+ \right] \\ &= e^{-r\tau} E \left[ (S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau + \sigma W(\tau)} e^{\lambda\kappa\tau} X_n - K)^+ \right] \\ &= e^{-r\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} \right] E \left[ (\tilde{S}_t e^{-\lambda\kappa\tau} X_n - K)^+ \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} \right] (e^{-r\tau} E \left[ (\tilde{S}_t e^{-\lambda\kappa\tau} X_n - K)^+ \right]) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} \right] E[BS_C(\tilde{S}_t X_n e^{-\lambda\kappa\tau}, \tau, K, \sigma^2, r)] \end{aligned}$$

\* : Setze  $S_T$  durch  $S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\kappa)(T-t) + \sigma W(T-t)} X_n$  ein, und  $P(n \text{ Sprünge}) = \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!}$ .

Wobei  $X_n = \prod_{i=1}^n Y_i$ , und  $\tilde{S}_t = S_t e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau + \sigma W(\tau)}$ .

Ohne weitere Spezifikation der Verteilungsfunktion der  $Y_i$  können wir keine analytische Lösung angeben.

Merton gibt zwei Spezialfälle an, in denen eine analytische Lösung gefunden werden kann. Im folgenden Abschnitt, die aus [8] und [6] entnommen, werden die Lösungsformeln für diese beiden Fälle angegeben.

### 3.1.1 Plötzlicher Ruin

Die erste Möglichkeit für die Formulierung einer analytischen Lösung ist die des plötzlichen Ruins. Wenn das Poisson-Ereignis eintritt fällt, der Aktienkurs auf 0. Dies bedeutet, dass die Zufallsvariable  $Y$ , die die Änderung im Falle des Poisson-Ereignisses angibt, mit Wahrscheinlichkeit 1 gleich 0 ist. Die prozentuale Änderung des Aktienkurses liegt dann bei  $(Y - 1) = -1$ . Sei  $X_n = \prod_{i=0}^n Y_i$  eine Zufallsvariable, die dieselbe Verteilung besitzt wie das Produkt von  $n$  unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen, jede identisch verteilt zur Zufallsvariable  $Y$ , wobei gilt, dass  $X_0 = 1$ . So gilt für den Fall des plötzlichen Ruins, dass  $X_n = 0$  für  $n \neq 0$  und  $\kappa = -1$ . In diesem Fall ist der Wert einer Europäischen Call-Option mit verbleibender Laufzeit  $\tau = T - t$

$$V_C(S, t) = BS_C(\tilde{S}_t, \tau, K, \sigma^2, r + \lambda) \quad (15)$$

#### Beweis

Nach (3.1) ist

$$\begin{aligned} V_C(S, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} \right] E[BS_C(\tilde{S}_t X_n e^{-\lambda\kappa\tau}, \tau, K, \sigma^2, r)] \\ &= \left[ \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^0}{0!} \right] E[BS_C(\tilde{S}_t X_0 e^{-\lambda(-1)\tau}, \tau, K, \sigma^2, r)] \\ &= e^{-\lambda\tau} BS_C(\tilde{S}_t e^{\lambda\tau}, \tau, K, \sigma^2, r) \\ &= e^{-\lambda\tau} (\tilde{S}_t e^{\lambda\tau} \Phi(d_1) - K e^{-r\tau} \Phi(d_2)) \\ &= \tilde{S}_t \Phi(d_1) - K e^{-(r+\lambda)\tau} \Phi(d_2), \end{aligned}$$

wobei

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

die kumulative Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Varianz 1 ist.

Nach dem Black-Scholes-Formel ist

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{\tilde{S}_t e^{\lambda\tau}}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{\tilde{S}_t}{K}\right) + (r + \lambda + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \end{aligned}$$

und

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}.$$

Somit ist :

$$V_C(S, \tau) = BS_C(\tilde{S}_t, \tau, K, \sigma^2, r + \lambda)$$

$BS_C(S, \tau, K, \sigma^2, r + \lambda)$  ist die Lösung der Black-Scholes-Gleichung. Diese Lösung ist bis auf die höhere Zinsrate  $\tilde{r} = r + \lambda$  identisch mit der Standard Black-Scholes Lösung. In [7] wird gezeigt, dass der Optionspreis eine wachsende Funktion der Zinsrate ist. Somit ist eine Option auf eine Aktie mit positiver Wahrscheinlichkeit auf einen plötzlichen Ruin teurer als eine Option auf eine Aktie, die diese Möglichkeit nicht berücksichtigt.

### 3.1.2 Lognormalverteilte Sprünge

Im zweiten Fall wird vorausgesetzt, dass die Zufallsvariable  $Y$ , welche die Kursänderung im Sprungfall angibt, lognormalverteilt ist.

In diesem Fall kann der Preis einer Call-Option wie folgt geschrieben werden

$$V_C(S, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{e^{-\tilde{\lambda}\tau} (\tilde{\lambda}\tau)^n}{n!} \right] BS_C(\tilde{S}_t, \tau, K, v_n^2, r_n) \quad (16)$$

wobei

- $\tilde{\lambda} = \lambda(1 + \kappa)$ ,
- $\kappa = E[Y - 1] = e^{(\mu_J + \frac{\sigma_J^2}{2})} - 1$ ,
- $d_{1,n} = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r_n + \frac{v_n^2}{2})\tau}{v_n \sqrt{\tau}}$ ,
- $d_{2,n} = d_{1,n} - v_n \sqrt{\tau}$ ,
- $r_n = r - \lambda\kappa + \frac{n(\log(1+\kappa))}{\tau}$ ,
- $v_n^2 = \sigma^2 + \frac{n\sigma_J^2}{2}$ ,
- $\mu_J =$  Erwartungswert der Sprungverteilung,
- $\sigma_J^2 =$  Varianz der Sprungverteilung.

Um (3.3) zu beweisen, benutzen wir das folgende Lemma aus [10].

**Lemma:**

Falls eine Zufallsvariable  $X$  normalverteilt ist mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma^2$  und  $\alpha$  und  $\beta > 0$  reelle Konstanten sind, dann gelten die folgenden Eigenschaften

$$E[\Phi(X)] = \Phi\left(\frac{\mu}{\sqrt{1 + \sigma^2}}\right) \quad (17)$$

und

$$E[e^X \Phi\left(\frac{X - \alpha}{\beta}\right)] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \Phi\left(\frac{\sigma^2 + \mu - \alpha}{\sqrt{\sigma^2 + \beta^2}}\right), \quad (18)$$

**Beweis der Formel (3.3)**

Definiere  $X_n = \prod_{i=1}^n Y_i$ , und sei  $V = \log(X_n)$ , dann ist

$$V = \sum_{i=1}^n \log Y_i$$

Da die Verteilung von  $Y_j$  lognormalverteilt ist, das heißt  $\log Y_j \sim N(\mu_J, \sigma_J^2)$

dann ist

$$V = \sum_{j=1}^n \log Y_j \sim N(n\mu_J, n\sigma_J^2)$$

Nach (3.1) ist

$$\begin{aligned} V_C(S, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} \right] E[BS_C(\tilde{S}_t X_n e^{-\lambda\kappa\tau}, \tau, K, \sigma^2, r)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} \right] E[BS_C(\tilde{S}_t e^V e^{-\lambda\kappa\tau}, \tau, K, \sigma^2, r)] \end{aligned}$$

Nach dem Black-Scholes-Formel ist

$$\begin{aligned} E[BS_C(\tilde{S}_t e^V e^{-\lambda\kappa\tau}, \tau, K, \sigma^2, r)] &= E \left[ \frac{\tilde{S}_t e^V e^{-\lambda\kappa\tau} \Phi \left( \log\left(\frac{\tilde{S}_t}{K}\right) + V - \lambda\kappa\tau + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau \right)}{\sigma\sqrt{\tau}} \right] \\ &\quad - E \left[ \frac{K e^{-r\tau} \Phi \left( \log\left(\frac{\tilde{S}_t}{K}\right) + V - \lambda\kappa\tau + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau \right)}{\sigma\sqrt{\tau}} \right] \quad (19) \end{aligned}$$

Wir werden diese beide Terme als  $T_1$  und  $T_2$  bezeichnen, und nacheinander betrachten.

Mit Hilfe (3.4) kann  $T_2$  geschrieben werden als

$$T_2 = K e^{-r\tau} \Phi \left( -\frac{\bar{\mu}}{\sqrt{1 + \overline{\sigma^2}}} \right)$$

mit

$$\bar{\mu} = \frac{\log\left(\frac{\tilde{S}_t}{K}\right) + n\mu_J + \left(r - \lambda\kappa - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

und

$$\overline{\sigma^2} = \frac{n\sigma_J^2}{\sigma^2\tau}.$$

Nach (3.5) kann  $T_1$  geschrieben werden als

$$T_1 = \tilde{S}_t e^{-\lambda\kappa\tau} e^{n\mu_J + \frac{n\sigma_J^2}{2}} \Phi \left( \frac{n\sigma_J^2 + n\mu_J - \alpha}{\sqrt{n\sigma_J^2 + \beta}} \right)$$

mit

$$\alpha = \lambda\kappa\tau - \log\left(\frac{\tilde{S}_t}{K}\right) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau$$

und

$$\beta = \sigma\sqrt{\tau}.$$

dann ist

$$\begin{aligned} T_1 - T_2 &= \tilde{S}_t e^{-\lambda\kappa\tau} e^{n\mu_J + \frac{n\sigma_J^2}{2}} \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{\tilde{S}_t}{K}\right) + \left(r - \lambda\kappa + \frac{n\mu_J}{\tau} + \frac{n\sigma_J^2}{\tau} + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sqrt{n\sigma_J^2 + \sigma^2\tau}}\right) \\ &\quad - K e^{-r\tau} \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{\tilde{S}_t}{K}\right) + \left(r - \lambda\kappa + \frac{n\mu_J}{\tau} - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sqrt{\sigma^2\tau + \sigma_J^2}}\right) \\ &= \tilde{S}_t e^{-\lambda\kappa\tau} e^{n\mu_J + \frac{n\sigma_J^2}{2}} \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{\tilde{S}_t}{K}\right) + \left(r - \lambda\kappa + \frac{n\mu_J + \frac{n\sigma_J^2}{2}}{\tau} + \frac{\sigma^2 + \frac{n\sigma_J^2}{2}}{\tau}\right)\tau}{\sqrt{n\sigma_J^2 + \sigma^2\tau}}\right) \\ &\quad - K e^{-r\tau} \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{\tilde{S}_t}{K}\right) + \left(r - \lambda\kappa + \frac{n\mu_J + \frac{n\sigma_J^2}{2}}{\tau} - \frac{\sigma^2 + \frac{n\sigma_J^2}{2}}{\tau}\right)\tau}{\sqrt{\sigma^2\tau + \sigma_J^2}}\right) \\ &= \tilde{S}_t e^{-\lambda\kappa\tau} e^{n\mu_J + \frac{n\sigma_J^2}{2}} \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{\tilde{S}_t}{K}\right) + \left(r_n + \frac{v_n^2}{2}\right)\tau}{v_n\sqrt{\tau}}\right) \\ &\quad - K e^{-r\tau} \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{\tilde{S}_t}{K}\right) + \left(r_n - \frac{v_n^2}{2}\right)\tau}{v_n\sqrt{\tau}}\right) \\ &= e^{-\lambda\kappa\tau} e^{n\mu_J + \frac{n\sigma_J^2}{2}} \left[ \tilde{S}_t \Phi(d_{1,n}) - K e^{-r_n\tau} \Phi(d_{2,n}) \right] \\ &= e^{-\lambda\kappa\tau} (1 + \kappa)^n \left[ \tilde{S}_t \Phi(d_{1,n}) - K e^{-r_n\tau} \Phi(d_{2,n}) \right] \end{aligned}$$

Setzen wir  $T_1 - T_2$  in (3.6), dann ist

$$\begin{aligned} V_C(S, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} \right] e^{-\lambda\kappa\tau} (1 + \kappa)^n \left[ \tilde{S}_t \Phi(d_{1,n}) - K e^{-r_n\tau} \Phi(d_{2,n}) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{e^{-\lambda(1+\kappa)\tau} (\lambda\tau(1+\kappa))^n}{n!} \right] e^{-\lambda\kappa\tau} (1 + \kappa)^n \left[ \tilde{S}_t \Phi(d_{1,n}) - K e^{-r_n\tau} \Phi(d_{2,n}) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{e^{-\tilde{\lambda}\tau} (\tilde{\lambda}\tau)^n}{n!} \right] \left[ \tilde{S}_t \Phi(d_{1,n}) - e^{-r_n\tau} K \Phi(d_{2,n}) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{e^{-\tilde{\lambda}\tau} (\tilde{\lambda}\tau)^n}{n!} \right] BS_C\left(\tilde{S}_t, \tau, K, v_n^2, r_n\right) \end{aligned}$$

Wir erhalten also auch im Fall der lognormalverteilten Sprünge eine Anwendung der Black-Scholes-Formel mit veränderten Parametern. Zur Berechnung des Optionspreises muss eine unendliche, jedoch konvergente, mit einer Poisson-Verteilung gewichtete Summe ausgewertet werden.

### 3.2 Kou-Modell

Im Gegensatz zum Merton-Modell existiert im Kou-Modell [4] analytische geschlossene Lösungen für Europäische Optionen. Der folgende Abschnitt nimmt Bezug auf [4] und [5].

#### Notation

Für jede gegebene Wahrscheinlichkeit, definiere

$$\Upsilon(\mu, \sigma, \lambda, p, \eta_1, \eta_2; a, T) := P\{Z(T) \geq a\}, \quad (20)$$

wobei

$$Z(t) = \mu t + \sigma W(t) + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i,$$

$Y$  hat eine doppel-Exponential-Verteilung und die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsvariablen  $Y$  ist gegeben durch

$$g_Y(x) = p\eta_1 e^{-\eta_1 x} 1_{\{x \geq 0\}} + q\eta_2 e^{\eta_2 x} 1_{\{x < 0\}} \quad (21)$$

$$\eta_1 > 0, \eta_2 > 0.$$

#### 3.2.1 analytische Lösung

Nach dem Martingalansatz kann Der Preis einer Call-Option wie folgt geschrieben werden

$$V_C(S, 0) = S(0) \Upsilon\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\xi, \sigma, \tilde{\lambda}, \tilde{p}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2; \log\left(\frac{k}{S(0)}\right), T\right) \quad (22)$$

$$- K e^{-rT} \Upsilon\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\xi, \sigma, \lambda, p, \eta_1, \eta_2; \log\left(\frac{k}{S(0)}\right), T\right),$$

wobei

- $\tilde{p} = \frac{p}{1+\zeta} \cdot \frac{\eta_1}{\eta_1-1}$ ,
- $\tilde{\eta}_1 = \eta_1 - 1$ ,
- $\tilde{\eta}_2 = \eta_2 + 1$ ,
- $\tilde{\lambda} = \lambda(\zeta + 1)$ ,
- $\zeta = \frac{p\eta_1}{\eta_1-1} + \frac{q\eta_2}{\eta_2+1} - 1$ ,



Der Preis der entsprechenden Put-Option  $V_P(S, 0)$ , kann durch die Put-Call-Parität erhalten

$$\begin{aligned}
V_P(S, 0) &= V_C(S, 0) + e^{-rT} E^* \left( (K - S(T))^+ - (S(T) - K)^+ \right) \\
&= V_C(S, 0) + e^{-rT} E^* (K - S(T)) \\
&= V_C(S, 0) + K e^{-rT} - S(0).
\end{aligned} \tag{23}$$

**Beweis der Formel (3.9)**

Nach Martingal Ansatz ist:

$$\begin{aligned}
V_C(S, 0) &= e^{-rT} E^* \left( (S(T) - K)^+ 1_{\{S(T) \geq K\}} \right) \\
&= E^* \left( e^{-rT} (S(T) - K)^+ 1_{\{S(T) \geq K\}} \right) \\
&= E^* \left( e^{-rT} S(T) 1_{\{S(T) \geq K\}} \right) - K e^{-rT} E^* \left( 1_{\{S(T) \geq K\}} \right) \\
&= \underbrace{E^* \left( e^{-rT} S(T) 1_{\{S(T) \geq K\}} \right)}_{:=I} - K e^{-rT} \underbrace{P^* (S(T) \geq K)}_{:=II} \\
&= I - K e^{-rT} \times II
\end{aligned}$$

1. Betrachte  $II$ :

Definiere  $X(t) = \log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)$ , aus  $S(T) \geq K$ , folgt

$$X(T) \geq \log\left(\frac{K}{S(0)}\right)$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
II &= P^* (S(T) \geq K) \\
&= P^* \left( X(T) \geq \log\left(\frac{K}{S(0)}\right) \right) \\
&= \Upsilon \left( r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\xi, \sigma, \lambda, p, \eta_1, \eta_2; \log\left(\frac{k}{S(0)}\right), T \right).
\end{aligned}$$

2. Betrachte  $I$  und definiere  $\tilde{P}$ , wobei  $\tilde{P}$  eine neue Wahrscheinlichkeit ist.

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{P}}{dP^*} &= e^{-rT} \frac{S(T)}{S(0)} \\
&= e^{-rT} e^{X(T)} \\
&= e^{\left(-\frac{\sigma^2}{2} - \lambda\xi\right)T + \sigma W(T) + \sum_{i=1}^{N(T)} Y_i}
\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Girsanov [1] ist

$$\tilde{W}(t) := W(t) - \sigma t,$$

wobei  $\tilde{W}(t)$  eine neue Brownsche Bewegung unter der Wahrscheinlichkeit  $\tilde{P}$ .  
Dann ist

$$\begin{aligned} X(t) &= \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\zeta\right)t + \sigma W(t) + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, & X(0) &= 0 \\ &= \left(r + \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\zeta\right)t + \sigma \tilde{W}(t) + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, & X(0) &= 0, \end{aligned}$$

$X(t)$  ist ein neue Doppel-Exponential-Sprung-Diffusionsprozess, wobei der Poisson-Prozess  $N(t)$  eine neue Rate  $\tilde{\lambda}$  hat

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \lambda E^*(e^Y) \\ &= \lambda \left( p \frac{\eta_1}{\eta_1 - 1} + q \frac{\eta_2}{\eta_2 + 1} \right) \\ &= \lambda(1 + \zeta), \end{aligned}$$

und eine neue Dichte  $\tilde{g}_Y(y)$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{g}_Y(y) &= \frac{1}{E^*(e^Y)} e^y g_Y(y) \\ &= \frac{1}{E^*(e^Y)} e^y p \eta_1 e^{-\eta_1 y} 1_{\{y \geq 0\}} + \frac{1}{E^*(e^Y)} e^y q \eta_2 e^{\eta_2 y} 1_{\{y < 0\}} \\ &= p \frac{1}{E^*(e^Y)} \frac{\eta_1}{\eta_1 - 1} (\eta_1 - 1) e^{-(\eta_1 - 1)y} 1_{\{y \geq 0\}} + q \frac{1}{E^*(e^Y)} \frac{\eta_2}{\eta_2 + 1} (\eta_2 + 1) e^{(\eta_2 + 1)y} 1_{\{y < 0\}}. \end{aligned}$$

Sei nun  $\tilde{\eta}_1 = \eta_1 - 1$ ,  $\tilde{\eta}_2 = \eta_2 + 1$ ,  $\tilde{p} = p \left( \frac{p\eta_1}{\eta_1 - 1} + \frac{q\eta_2}{\eta_2 + 1} \right)^{-1} \frac{\eta_1}{\eta_1 - 1}$ , und  $\tilde{q} = q \left( \frac{p\eta_1}{\eta_1 - 1} + \frac{q\eta_2}{\eta_2 + 1} \right)^{-1} \frac{\eta_2}{\eta_2 + 1}$ ,  
dann ist

$$\tilde{g}_Y(y) = \tilde{p} \tilde{\eta}_1 e^{-\tilde{\eta}_1 y} 1_{\{y \geq 0\}} + \tilde{q} \tilde{\eta}_2 e^{\tilde{\eta}_2 y} 1_{\{y < 0\}}.$$

$I$  kann geschrieben werden wie folgt:

$$\begin{aligned} I &= S(0) E^* \left[ e^{-rT} \frac{S(T)}{S(0)} \cdot 1_{\{S(T) \geq K\}} \right] \\ &= S(0) \tilde{P} [S(T) \geq K] \\ &= S(0) \Upsilon \left( r + \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\xi, \sigma, \tilde{\lambda}, \tilde{p}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2; \log \left( \frac{k}{S(0)} \right), T \right). \end{aligned}$$

Aus 1. und 2. folgt dann:

$$V_C(S, 0) = I - K e^{-rT} \times II.$$

### 3.2.2 Herleitung der expliziten Formel

Nach [4] kann der Preis einer Call-Option von einer Summe aus  $Hh$  Funktionen abgeleitet werden. Um dem Optionspreisformel zu herleiten, benötigen wir folgende Propositionen.

#### Definition

Für jede  $n \geq 0$  ist  $Hh$  definiert als

$$\begin{aligned} Hh_n(x) &= \int_x^\infty Hh_{n-1}(y) dy \\ &= \frac{1}{n!} \int_x^\infty (t-x)^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

wobei

$$Hh_{-1}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

und

$$Hh_0(x) = \sqrt{2\pi}\Phi(-x).$$

Nach [4] kann  $Hh$  Funktion auch geschrieben werden als

$$Hh_n(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{für } n = -1 \\ \sqrt{2\pi}\Phi(-x), & \text{für } n = 0 \\ \frac{1}{n}(Hh_{n-2}(x) - xHh_{n-1}(x)), & \text{für } n \geq 1. \end{cases} \quad (24)$$

#### Proposition 1

Nach (2.29) ist für jede  $n \geq 1$

$$\sum_{i=1}^n Y_i \stackrel{d}{=} \begin{cases} \sum_{i=1}^k \zeta_i^+, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } P_{n,k} \\ -\sum_{i=1}^k \zeta_i^-, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } Q_{n,k}, \end{cases} \quad (25)$$

wobei

$$P_{n,k} = \begin{cases} \sum_{i=k}^{n-1} \binom{n-k-1}{i-k} \binom{n}{i} \left(\frac{\eta_1}{\eta_1+\eta_2}\right)^{i-k} \left(\frac{\eta_2}{\eta_1+\eta_2}\right)^{n-i} p^i q^{n-i}, & \text{für } 1 \leq k \leq n-1 \\ p^n, & \text{für } k = n \end{cases} \quad (26)$$

$$Q_{n,k} = \begin{cases} \sum_{i=k}^{n-1} \binom{n-k-1}{i-k} \binom{n}{i} \left(\frac{\eta_1}{\eta_1+\eta_2}\right)^{n-i} \left(\frac{\eta_2}{\eta_1+\eta_2}\right)^{i-k} p^{n-i} q^i, & \text{für } 1 \leq k \leq n-1 \\ q^n, & \text{für } k = n \end{cases} \quad (27)$$

Beweis: Siehe [4].

**Proposition 2**

Wenn  $\beta > 0$  und  $\alpha \neq 0$ , dann ist für alle  $n \geq -1$ ,

$$I_n(c; \alpha, \beta, \delta) = -\frac{e^{\alpha c}}{\alpha} \sum_{i=0}^n \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-i} Hh_i(\beta c - \delta) + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1} \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} e^{\frac{\alpha\delta}{\beta} + \frac{\alpha^2}{2\beta^2}} \times \Phi\left(-\beta c + \delta + \frac{\alpha}{\beta}\right), \quad (28)$$

und wenn  $\beta < 0$  und  $\alpha < 0$ , dann ist für alle  $n \geq -1$ ,

$$I_n(c; \alpha, \beta, \delta) = -\frac{e^{\alpha c}}{\alpha} \sum_{i=0}^n \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-i} Hh_i(\beta c - \delta) - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1} \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} e^{\frac{\alpha\delta}{\beta} + \frac{\alpha^2}{2\beta^2}} \times \Phi\left(\beta c - \delta - \frac{\alpha}{\beta}\right), \quad (29)$$

Beweis: Siehe [4]

**Proposition 3**

Es sei  $\{\zeta_1, \zeta_2, \dots\}$  eine Folge von i.i.d. exponential Zufallsvariable mit rate  $\eta$  und  $Z = N(0, \sigma^2)$  eine normalverteilte Zufallsvariable. Dann gilt für jedes  $n \geq 1$

$$P\left(Z + \sum_{i=1}^n \zeta_i \geq x\right) = \frac{(\sigma\eta)^n}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{(\sigma\eta)^2} I_{n-1}\left(x; -\eta, -\frac{1}{\sigma}, -\sigma\eta\right), \quad (30)$$

$$P\left(Z - \sum_{i=1}^n \zeta_i \geq x\right) = \frac{(\sigma\eta)^n}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{(\sigma\eta)^2} I_{n-1}\left(x; \eta, \frac{1}{\sigma}, -\sigma\eta\right), \quad (31)$$

Beweis: Siehe [4].

**Herleitung der expliziten Formel**

Nach (3.7) ist

$$\begin{aligned} \Upsilon(\mu, \sigma, \lambda, p, \eta_1, \eta_2; a, T) &= P(X(T) \geq a) \\ &= P(\mu T + \sigma W(T) + \sum_{i=1}^{N(T)} Y_i \geq a) \end{aligned}$$

$W(T) = \sqrt{T}Z$ , wobei  $Z = N(0, \sigma^2)$  eine normalverteilte Zufallsvariable ist. Dann ist

$$\begin{aligned} \Upsilon(\mu, \sigma, \lambda, p, \eta_1, \eta_2; a, T) &= P(\mu T + \sigma\sqrt{T}Z + \sum_{i=1}^{N(T)} Y_i \geq a) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N(T) = n) P(\mu T + \sigma\sqrt{T}Z + \sum_{i=1}^n Y_i \geq a) \end{aligned}$$

Definiere  $\pi_n = P(N(T) = n) = \frac{e^{-\lambda T} (\lambda T)^n}{n!}$ , dann folgt

$$\Upsilon(\mu, \sigma, \lambda, p, \eta_1, \eta_2; a, T) = \pi_0 P(\mu T + \sigma\sqrt{T}Z \geq a) + \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n P(\mu T + \sigma\sqrt{T}Z + \sum_{i=1}^n Y_i \geq a)$$

Nach Proposition 1 folgt

$$\begin{aligned} \Upsilon(\mu, \sigma, \lambda, p, \eta_1, \eta_2; a, T) &= \pi_0 P(\mu T + \sigma\sqrt{T}Z \geq a) + \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \sum_{k=1}^n P_{n,k} P(\mu T + \sigma\sqrt{T}Z + \sum_{i=1}^k \zeta_i^+ \geq a) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \sum_{k=1}^n Q_{n,k} P(\mu T + \sigma\sqrt{T}Z - \sum_{i=1}^k \zeta_i^- \geq a) \end{aligned} \quad (32)$$

Nach Proposition 3 ist

$$P(\mu T + \sigma\sqrt{T}Z + \sum_{i=1}^k \zeta_i^+ \geq a) = \frac{e^{(\sigma\eta_1)^2 \frac{T}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi T}} (\sigma\sqrt{T}\eta_1)^k I_{k-1}(a - \mu T; -\eta_1, -\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}, -\sigma\eta_1\sqrt{T}) \quad (33)$$

$$P(\mu T + \sigma\sqrt{T}Z - \sum_{i=1}^k \zeta_i^- \geq a) = \frac{e^{(\sigma\eta_2)^2 \frac{T}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi T}} (\sigma\sqrt{T}\eta_2)^k I_{k-1}(a - \mu T; \eta_2, \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}, -\sigma\eta_2\sqrt{T}) \quad (34)$$

$$P(\mu T + \sigma\sqrt{T}Z \geq a) = \Phi\left(-\frac{a - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right), \quad (35)$$

Setzen wir (3.20), (3.21) und (3.22) in (3.19) ein, dann folgt die explizite Formel

$$\begin{aligned} \Upsilon(\mu, \sigma, \lambda, p, \eta_1, \eta_2; a, T) &= \frac{e^{(\sigma\eta_1)^2 \frac{T}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \sum_{k=1}^n P_{n,k} (\sigma\sqrt{T}\eta_1)^k I_{k-1}(a - \mu T; -\eta_1, -\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}, -\sigma\eta_1\sqrt{T}) \\ &\quad + \frac{e^{(\sigma\eta_2)^2 \frac{T}{2}}}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \sum_{k=1}^n Q_{n,k} (\sigma\sqrt{T}\eta_2)^k I_{k-1}(a - \mu T; \eta_2, \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}, -\sigma\eta_2\sqrt{T}) \\ &\quad + \pi_0 \Phi\left(-\frac{a - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right), \end{aligned} \quad (36)$$

## 4 Monte Carlo Simulation

Bei dem Monte Carlo Verfahren wird ein Integrand an (gleichverteilt) zufällig ausgewählten Stützstellen ausgewertet und der Integralwert als Mittel der Funktionswerte an diesen Stützstellen berechnet, d.h.

$$If := \int_0^1 f(x) dx \approx Q_n f := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i).$$

Der Grundgedanke des Monte-Carlo-Verfahren ist es, den Aktienpreisverlauf für  $m$  Wiederholungen zu simulieren und den Wert der Option  $V_i$  für  $i = 1, \dots, m$  zu berechnen. Dann ist der erwartete Wert der Auszahlung gegeben durch

$$V = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m V_i.$$

Den finalen Optionspreis erhält man durch Diskontieren der erwarteten Auszahlung, d.h.  $e^{-rT}\hat{V}$ .

**Theorem (Konvergenz des Monte Carlo-Verfahrens)**

Für den Erwartungswert des Integrationsfehlers gilt

$$E(|If - Q_n f|) = \frac{\sigma(f)}{\sqrt{N}},$$

wobei

$$\sigma^2(f) := \int_{[0,1]} f^2(x) dx - \left( \int_{[0,1]} f(x) dx \right)^2.$$

Beweis: (Gesetz der großen Zahlen).

Das bedeutet, daß 100-mal mehr Funktionsauswertungen benötigt werden um eine Stelle mehr an Genauigkeit zu erreichen.

**Anmerkungen:**

Das Monte Carlo Verfahren läßt sich durch Varianzreduktionstechniken beschleunigen, z.B.:

- Antithetische Variate: Symmetrisiere die Zufallszahlen (und damit den Zufallspfad) durch  $z'_j = -z_j$  und Mittelung der Ergebnisse, wobei  $z_j$  normalverteilt ist.
- Importance Sampling: sample die Bereiche stärker, die wichtiger für das Ergebnis sind - eine Schätzung für wichtige Bereiche können geschlossenen Lösungsformeln für verwandte Optionen liefern.
- Stratified Sampling: Unterteile das Integrationsgebiet in Teilgebiete und stelle sicher, dass jedes Teilgebiet etwa die gleiche Zahl von Samples erhält.

**4.1 Monte-Carlo-Simulation für das Merton- und Kou-Modell**

In diesem Abschnitt wird die vollständige Simulation zur Optionspreisbestimmung mit Hilfe des Monte-Carlo-Verfahren betrachtet. Der folgende Abschnitt nimmt Bezug auf [3] und [6].

Merton-Modell kann durch folgende stochastische Differentialgleichung angegeben werden

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t) + dq(t). \tag{37}$$

Hierbei sind  $\mu$  und  $\sigma$  Konstanten,  $W(t)$  eindimensionaler Standard Wiener Prozess und  $q$  ein Prozess unabhängig von  $W$ .  $q$  ist gegeben durch

$$q(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} (Y_j - 1), \tag{38}$$

mit Zufallsvariablen  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  und einem Zählprozess  $N(t)$ . Das heisst, dass es Zeitpunkte

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n$$

gibt, und einen Zählprozess

$$N(t) = \sup\{n : \tau_n \leq t\}, \quad (39)$$

der die Anzahl der Zeitpunkte im Intervall  $[0, t]$  zählt.  $dq(t)$  bezeichnet den Sprung zur Zeit  $t$ . Die Größe des Sprunges ist gegeben durch

$$dq(t) = \begin{cases} Y_j - 1 & \text{falls } t = \tau_j \\ 0 & \text{falls } t \neq \tau_j. \end{cases} \quad (40)$$

Mit der bestehenden Möglichkeit von Sprüngen ist die Bezeichnung  $S(t)$  möglicherweise doppeldeutig. Für den Fall, dass  $S$  zur Zeit  $t$  springt, muss spezifiziert werden, ob  $S(t)$  den Wert von  $S$  vor oder nach dem Sprung bezeichnet. Es wird analog zur gewöhnlichen Konvention angenommen, dass der Prozess rechtsstetig ist, so dass

$$S(t) = \lim_{u \downarrow t} S(u)$$

die Auswirkung eines beliebigen Sprunges zur Zeit  $t$  einschließt. Um den Wert kurz vor einem möglichen Sprung zu spezifizieren schreiben wir  $S(t-)$ , welches den Grenzwert

$$S(t-) = \lim_{u \uparrow t} S(u)$$

von links bezeichnet. Schreibt man (4.4) als

$$dS(t) = \mu S(t-)dt + \sigma S(t-)dW(t) + S(t-)dq(t), \quad (41)$$

ist zu erkennen, dass die Inkremente  $dS(t)$  in  $S$  zur Zeit  $t$  vom Wert von  $S$  kurz vor einem möglichen Sprung abhängen und nicht vom Wert nach einem Sprung. Der Sprung in  $S$  zur Zeit  $t$  ist  $S(t) - S(t-)$ . Dieser ist 0, es sei denn  $q$  springt am Zeitpunkt  $t$ , was bedeutet, dass  $t = \tau_j$  für ein  $j$ . Der Sprung in  $S$  an  $\tau_j$  ist gegeben durch

$$S(\tau_j) - S(\tau_j-) = S(\tau_j-)[q(\tau_j) - q(\tau_j-)] = S(\tau_j-)(Y_j - 1).$$

Daher gilt

$$S(\tau_j) = S(\tau_j-)Y_j. \quad (42)$$

Dies bedeutet, dass die  $Y_j$  die Raten des Kurspreises vor und nach dem Sprung sind. Die Sprünge sind multiplikativ. Das erklärt, warum in (4.5)  $Y_j - 1$  und nicht  $Y_j$  geschrieben wird. Durch die Beschränkung der  $Y_j$  auf positive Zufallszahlen wird sichergestellt, dass  $S(t)$  nicht negativ werden kann. In diesem Fall sehen wir, dass

$$\log S(\tau_j) = \log S(\tau_j-) + \log Y_j.$$

Von (4.4) lässt sich die Lösung schreiben als

$$S(t) = S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)} \prod_{j=1}^{N(t)} Y_j \quad (43)$$

welche die entsprechende Lösung der Geometrischen Brownschen Bewegung verallgemeinert.

Bisher wurden keine Annahmen über die Verteilungen des Sprung-Prozesses gemacht. Nun betrachten wir das Merton-Modell und Kou-Modell, darin wird angenommen, dass  $N(t)$  ein Poisson-Prozess mit Rate  $\lambda$  ist und außerdem gilt, dass die  $Y_j$  unabhängig und identisch verteilt und unabhängig von  $q$  und  $W$  sind.

#### 4.1.1 Simulation an festen Zeitpunkten $t_i$

Der Prozess wird an einer festen Menge von Daten,  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ , ohne die expliziten Auswirkungen des Sprungs- und Diffusionsterms aufzuzeigen, simuliert. Dies ist nützlich, da nur der Endwert  $S(T)$  von Bedeutung ist. Des Weiteren wird angenommen, dass  $N$  ein Poisson-Prozess ist und  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen sind. Der Poisson-Prozess  $N$ , der Wiener Prozess  $W$  und die Menge der  $Y_j$  sind untereinander unabhängig. Um  $S(t)$  an den Zeitpunkten  $t_1, \dots, t_n$  zu simulieren, wird (4.10) verallgemeinert zu

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t_{i+1} - t_i) + \sigma[W(t_{i+1}) - W(t_i)]} \prod_{j=N(t_i)+1}^{N(t_{i+1})} Y_j. \quad (44)$$

Durch die Transformation  $X(t) = \log S(t)$ , lässt sich (4.11) schreiben als

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t_{i+1} - t_i) + \sigma [W(t_{i+1}) - W(t_i)] + \sum_{j=N(t_i)+1}^{N(t_{i+1})} \log Y_j. \quad (45)$$

Durch Exponentieren der  $X(t_i)$  ergeben sich dann die Werte  $S(t_i)$ .

Es gilt, dass das Produkt über  $j$  gleich 1 ist, falls  $N(t_{i+1}) = N(t_i)$  ist.

Der Grundgedanke des Monte-Carlo-Verfahren ist es, den Aktienpreisverlauf für  $m$  Wiederholungen zu simulieren und den Wert der Option  $V_i$  für  $i = 1, \dots, m$  zu berechnen. Dann ist der erwartete Wert der Auszahlung gegeben durch

$$\hat{V} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m V_i.$$

Den finalen Optionspreis erhält man durch Diskontieren der erwarteten Auszahlung, d.h.  $e^{-rT} \hat{V}$ .



```

Generiere eine standard normalverteilte Zufallsvariable  $Z \sim N(0, 1)$ 
Generiere eine poissonverteilte Zufallsvariable  $N \sim Poisson(\lambda(t_{i+1} - t_i))$ .
if  $N \neq 0$  then
  Generiere  $\log(Y_1), \dots, \log(Y_N)$  von ihrer allgemeinen Verteilung.
  Setze  $M = \log Y_1 + \dots + \log Y_N$ .
end if
Setze  $X(t_{i+1}) = X(t_i) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{(t_{i+1} - t_i)}Z + M$ .
Setze  $S(t_i) = \exp(X(t_i))$ .
Setze  $V(t_i) = \max(0, S(t_i) - K)$ .
Setze  $V_{MC} = \exp(-rT) \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m V_i$ .

```

ALGORITHM 1: Schritte zur Simulation eines Aktienkurses mit beliebiger Sprungverteilungsfunktion.

Allgemein kann die Monte-Carlo-Simulation für (4.12) im Algorithmus 1 zusammengefasst werden. Diese Methode beruht auf zwei Eigenschaften des Poisson-Prozesses. Der Zuwachs  $N(t_{i+1}) - N(t_i)$  hat eine Poisson-Verteilung mit Mittelwert  $\lambda(t_{i+1} - t_i)$  und er ist unabhängig von  $N$  über  $[0, t_i]$ .

Falls die Verteilung von  $Y_j$  lognormalverteilt ist, das heißt  $\log Y_j \sim N(a, b^2)$ , dann ist für festes  $n$ :

$$\sum_{j=1}^n \log Y_j \sim N(an, b^2n) = an + b\sqrt{n}N(0, 1).$$

In diesem Fall kann in Algorithmus 1 die Generierung der Zufallszahlen nach ihrer allgemeinen Verteilung entfallen. Es ergibt sich ein vereinfachter Algorithmus 2.

```

Generiere eine standard normalverteilte Zufallsvariable  $Z \sim N(0, 1)$ 
Generiere eine poissonverteilte Zufallsvariable  $N \sim Poisson(\lambda(t_{i+1} - t_i))$ .
if  $N \neq 0$  then
  Generiere eine standard normalverteilte Zufallsvariable  $Z_2 \sim N(0, 1)$ .
  Setze  $M = aN + b\sqrt{N}Z_2$ .
end if
Setze  $X(t_{i+1}) = X(t_i) + \left(r - \lambda\kappa - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{(t_{i+1} - t_i)}Z + M$ .

```

ALGORITHM 2: Simulation eines Aktienkurses mit lognormalverteilten Sprüngen.

Falls die Verteilung von  $Y_j$  gammaverteilt ist, also ist  $\log Y_j \sim Gamma(a, \beta)$ , dann ist für festes  $n$ :

$$\sum_{j=1}^n \log Y_j \sim Gamma(an, \beta)$$

Ist  $N(t) = n$ , so ist die Anzahl der  $\log Y_i$  mit positiven Vorzeichen einer Binomialverteilung mit Parametern  $n$  und  $p$ .

In diesem Fall kann in Algorithmus 1 die Generierung der Zufallszahlen nach ihrer allgemeinen Verteilung entfallen. Es ergibt sich ein vereinfachter Algorithmus 3.

```

Generiere eine standard normalverteilte Zufallsvariable  $Z \sim N(0, 1)$ 
Generiere eine poissonverteilte Zufallsvariable  $N \sim Poisson(\lambda(t_{i+1} - t_i))$ .
if  $N \neq 0$  then
  Generiere eine gleich-verteilte Zufallsvariable  $r \sim rand(n)$ 
  Falls  $r < p$ 
    Generiere eine exponential-verteilte Zufallsvariable  $Y_i \sim exprnd(\frac{1}{\eta_1})$ .
  Anderenfalls
    Generiere eine exponential-verteilte Zufallsvariable  $Y_i \sim -exprnd(\frac{1}{\eta_2})$ .
  Setze  $M = \sum_{i=1}^N Y_i$ 
  end if
  Setze  $X(t_{i+1}) = X(t_i) + \left(r - \lambda\zeta - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{(t_{i+1} - t_i)}Z + M$ .

```

ALGORITHM 3: Simulation eines Aktienkurses mit Doppel-Exponential-Verteilten Sprüngen.

#### 4.1.2 Simulation der Sprungzeiten

Die Simulationen, die auf (4.12) beruhen, produzieren Werte  $S(t_i) = exp(X_i)$  für  $i = 1, \dots, n$  mit der exakten Verteilung des Prozesses (4.4) an Zeitpunkten  $t_1, \dots, t_n$ . Es sei bemerkt, dass diese Näherung nicht die Sprungzeiten für  $S(t)$  identifiziert. Es wird nur eine Gesamtanzahl der Sprünge in jedem Intervall  $(t_i, t_{i+1}]$  generiert. Dazu wird die Eigenschaft benutzt, dass die Anzahl der Sprünge in einem Intervall poissonverteilt ist. Eine alternative Näherung zur Simulation von (4.4) ist die explizite Simulation der Sprungzeitpunkte. Von einem Sprung zum nächsten entwickelt sich  $S(t)$  nach einer einfachen Geometrischen Brownschen Bewegung. Dies ist der Fall, da angenommen wurde, dass  $W$  und  $q$  in (4.4) unabhängig voneinander sind. Wenn  $\tau_1, \dots, \tau_n$  die Sprungzeiten darstellen, folgt

$$S(\tau_{j+1}-) = S(\tau_j) e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau_{j+1} - \tau_j) + \sigma[W(\tau_{j+1}) - W(\tau_j)]}, \quad (46)$$

und

$$S(\tau_{j+1}) = S(\tau_{j+1}-) Y_{j+1}. \quad (47)$$

Durch Logarithmieren ergibt sich

$$X(\tau_{j+1}) = X(\tau_j) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau_{j+1} - \tau_j) + \sigma[W(\tau_{j+1}) - W(\tau_j)] + \log Y_{j+1}. \quad (48)$$

Die Simulation von (4.15) ist in Algorithmus 4 dargestellt.

Generiere  $R_{j+1}$  mit Hilfe der exponentiellen Verteilung mit Erwartungswert  $\frac{1}{\lambda}$  :  
 $R_{j+1} = -\frac{\log(U)}{\lambda}$  wobei  $U$  gleichverteilt ist auf  $[0, 1]$ .  
 Generiere eine standard normalverteilte Zufallsvariable  $Z_{j+1} \sim N(0, 1)$ .  
 Generiere  $\log Y_{j+1}$ .  
 Setze  $\tau_{j+1} = \tau_j + R_{j+1}$ .  
 Setze  $X(\tau_{j+1}) = X(\tau_j) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) R_{j+1} + \sigma \sqrt{R_{j+1}} Z_{j+1} + \log Y_{j+1}$ .

ALGORITHM 4: Simulation eines Aktienkurses mit expliziter Simulation der Sprungzeiten

Die beiden Simulationsmethoden können kombiniert werden, um  $S(t)$  zu simulieren. Beispielsweise kann ein fester Zeitpunkt  $t$  gewählt werden, an dem ebenfalls simuliert werden soll. Falls  $\tau_j < t < \tau_{j+1}$ , d.h.  $J(t) = J(t-) = j$ , dann gilt

$$S(t) = S(\tau_j) e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t - \tau_j) + \sigma[W(t) - W(\tau_j)]},$$

und

$$S(\tau_{i+1}) = S(t) e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau_{i+1} - t) + \sigma[W(\tau_{i+1}) - W(t)]} Y_{j+1}.$$

Beide Näherungen zur Simulation von (4.4) können nützlich sein, um zumindest als Approximation zur Simulation allgemeinerer Sprung-Diffusions Prozesse zu dienen. Die exakte Simulation wird schwieriger, wenn die Sprungzeiten und die Entwicklung des Prozesses zwischen den Sprüngen nicht länger unabhängig voneinander sind.

Wir werden uns in Kapitel 5 auf die Simulation zu festen Zeitpunkten beschränken, da wir nur am Endkurs  $S(T)$  interessiert sind. Es ist nur von Bedeutung wie viele Sprünge auftreten, nicht jedoch zu welchen Zeitpunkten.

## 5 Numerische Ergebnisse

In den vorangegangenen Kapiteln wurden verschiedene Verfahren zur Bewertung von Europäischer Optionen vorgestellt. Im ersten Teil dieses Kapitels werden die Bewertungsverfahren Europäischer Optionen für das Merton-Modell und Kou-Modell analysiert. Es werden die exakte Werte einer Europäischen Optionen für beide Modelle berechnet. Zunächst wird das Monte-Carlo-Verfahren für Merton und Kou-Modell hinsichtlich ihrer Konvergenzeigenschaften untersucht. Für die Berechnungen der Optionswerte werden die Parameter der Tabelle 6.1 verwendet, wenn nicht anders angegeben.

Parameter	Bedeutung	Wert
$K$	Ausübungspreis	100.00
$T$	Laufzeit in Jahren	0.25
$r$	Zins	0.05
$\sigma$	Volatilität	0.15
$\lambda$	Sprungrate	0.10

$\mu_J$	Erwartungswert der Sprungverteilung	-0.90
$\sigma_J$	Varianz der Sprungverteilung	0.45
$\eta_1$	Aufwärtssprünge	10
$\eta_2$	Abwärtssprünge	5
$p$	Die Wahrscheinlichkeit	0.4

Tabelle 6.1: Die verwendeten Standardparameter der betrachteten Modelle

## 5.1 Geschlossene Lösungen

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der geschlossenen Lösungen für Merton-Modell und Kou-Modell diskutiert.

### 5.1.1 Plötzlicher Ruin

Im Fall des Plötzlichen Ruins kann eine geschlossene Lösung zur Berechnung des Optionspreises angegeben werden. In Abbildung 6.1 sind die Optionspreise für einen Call und einen Put mit verschiedenen Sprungintensitäten dargestellt.

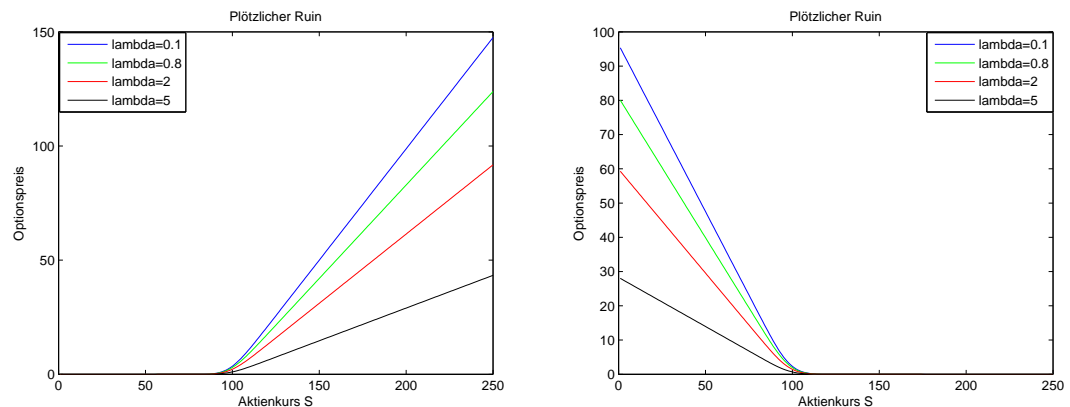


Abbildung 6.1: Optionspreise für eine Call-Options (links) und eine Put-Option (rechts) für den Fall des Plötzlichen Ruins in Abhängigkeit vom Kurs  $S$  und verschiedenen Sprungintensitäten  $\lambda$ .

Es ist zu beobachten, dass der Wert einer Call-Option mit wachsendem Kurs und wachsender Sprungintensität fällt. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kurs mit großer Sprungaktivität zum Ende der Laufzeit der Option noch nicht “gesprungen” ist und weiterhin ungleich 0 ist, ist sehr gering. Diese kleine Wahrscheinlichkeit, die einen relativ großen Gewinn garantieren würde, muss relativ teuer bezahlt werden.

Im Fall einer Put-Option steigt der Optionspreis mit kleiner werdendem Sprungparameter und kleinerem Kurs. Mit Hilfe der Put-Option kann ein Gewinn erzielt werden, wenn  $K - S$  groß, also wenn  $S$  klein wird. Falls der Kurs eine geringe

Sprungaktivität besitzt, richten sich die Änderungen des Kurses hauptsächlich nach der Brownschen Bewegung und somit wird sich der Wert des Kurses nur in kleinem Maße ändern. Daher ist die Wahrscheinlichkeit für einen kleinen Kurswert am Ende der Optionslaufzeit gering, wenn der Kurs zu Beginn der Laufzeit der Option relativ groß ist.

### 5.1.2 Lognormalverteilung

Die in Abschnitt 3.2.2 vorgestellte geschlossene Lösung zur Berechnung eines Optionspreises mit lognormalverteilten Sprüngen wird im Folgenden für alle weiteren verwendeten Verfahren als Referenzlösung genutzt. Dies bedeutet, dass der mittels anderer Verfahren bestimmte Optionspreis mit dem der geschlossenen Lösung verglichen wird. Da die geschlossene Lösung aus einer unendlichen Summe besteht, muss diese unendliche Summe zur Berechnung des Optionspreises durch eine endliche Summe approximiert werden. Es wurde gezeigt [6], dass der Fehler, der durch das Abschneiden der unendlichen Summe entsteht zu vernachlässigen ist, da zum einen die Werte der Poisson-Verteilung sehr schnell abfallen und zum anderen der mit Hilfe der Black-Scholes-Formel berechnete Optionspreis irgendwann exakt 0 wird und somit eine endliche Summe entsteht. In Abbildung 6.2 sind die Optionspreise für einen Call und einen Put mit verschiedenen Sprungintensitäten dargestellt.

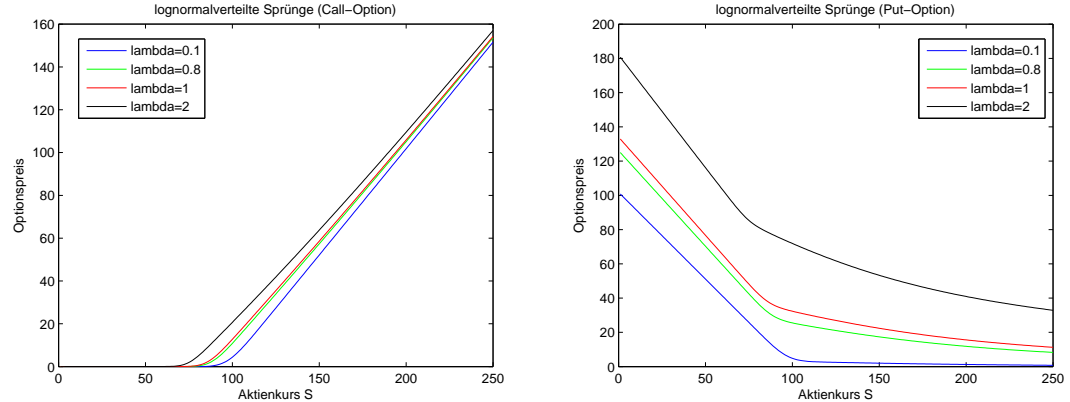


Abbildung 6.2: Optionspreise für einen Call (links) und einen Put (rechts) für den Fall der lognormalverteilten Sprünge in Abhängigkeit vom Kurs  $S$  mit verschiedenen Sprungintensitäten  $\lambda$

Für eine Call-Option steigt der Preis sowohl mit wachsenden Kurs als auch mit zunehmender Sprungrate. Wird eine Put-Option betrachtet, so steigt der Optionspreis mit wachsender Sprungintensität und sinkt mit ansteigendem Kurs. Diese Eigenschaften sind im Wesentlichen auf die Struktur der zugehörigen Auszahlungsfunktionen zurückzuführen.

Zusammenfassend gilt die in Abschnitt 6.2.1 und 6.2.2 dargestellten geschlossenen Lösungen, dass sie leicht zu berechnen sind, da sie lediglich auf der Black-Scholes-Formel mit variierenden Parametern beruhen.

### 5.1.3 Kou Modell

Im Fall des Kou-Modells kann eine analytische Lösung zur Berechnung des Optionspreises angegeben werden. In Abbildung 6.3 sind die Optionspreise für einen Call und einen Put mit verschiedenen Sprungintensitäten dargestellt.

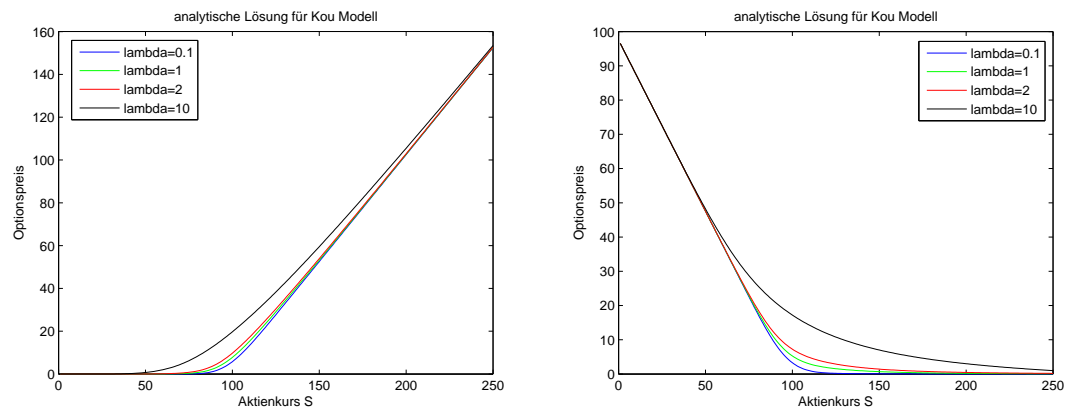


Abbildung 6.3: Optionspreise für einen Call (links) und einen Put (rechts) für Kou-Modell in Abhängigkeit vom Kurs  $S$  mit verschiedenen Sprungintensitäten  $\lambda$

Es ist zu beobachten, dass der Wert einer Call-Option mit wachsendem Kurs und wachsender Sprungintensität steigt. Wird eine Put-Option betrachtet, so steigt der Optionspreis mit wachsender Sprungintensität und sinkt mit ansteigendem Kurs.

### 5.1.4 Put-Call Tabelle für Merton und Kou-Modell

In diesen Abschnitt sollen zunächst die Optionspreise, die mit Hilfe der Black-Scholes-Formel berechnet wurden, mit solchen eines Sprung-Diffusions-Prozesses verglichen werden.

In Abbildung 6.4 sind links der Preis  $V(S, t)$  einer Europäischen Kauf-Option nach dem Black-Scholes Modell ( $\lambda = 0$ ) im Vergleich zu einer Europäischen Kauf-Option nach dem Merton-Modell und einer Europäischen Kauf-Option nach dem Kou-Modell mit verschiedenen Sprungintensitäten dargestellt. Zusätzlich ist die Payoff-Funktion abgebildet.

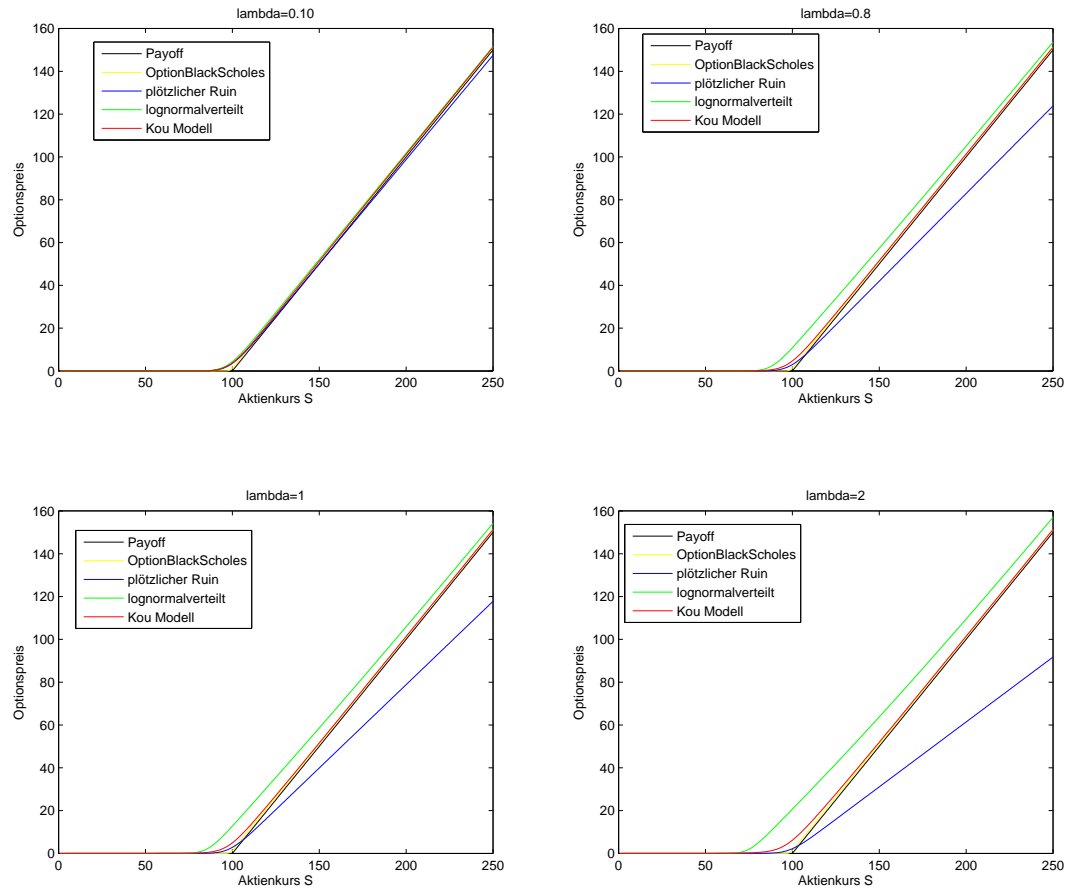


Abbildung 6.4: Optionspreise für eine Call-Option mit unterschiedlichen Sprungintensitäten

Abbildung 6.4 zeigt die Auswirkung der verstärkten Sprungauftrettsrate. Für steigende Sprungintensität  $\lambda$  ist ein Wachsen des Optionspreises festzustellen. Diese Feststellung beruht auf der Eigenschaft der Sprung-Diffusions-Prozesse. Diese Prozesse besitzen im Vergleich zur Brownschen Bewegung eine zusätzliche Komponente, die mögliche unerwartete Sprünge der Aktie widerspiegelt. Eine Option, die auf einem Sprung-Diffusions-Modell beruht "sichert" somit auch solche Sprünge ab und ist folglich teurer als eine Option, die keine unerwarteten Sprünge berücksichtigt. Eine Verstärkung der Sprungintensität wirkt sich in einem weiteren Anstieg des Optionspreises aus. Im Tabelle 6.2 und 6.3 sind Optionspreise für Merton-Modell und Kou-Modell aufgelistet.

Kurs	BLS	Ruin	Log	Kou
20	1.0374e-101	1.0118e-101	5.4440e-009	1.7772e-008
40	3.7157e-034	3.6240e-034	1.1931e-005	1.7593e-005
60	1.2683e-011	1.2370e-011	4.1301e-004	9.9440e-004
80	0.0049	0.0048	0.0122	0.0225
100	3.6351	3.5453	4.3912	3.7668
120	21.2543	20.7295	22.3821	21.3542
140	41.2422	40.2239	42.1936	41.2892
160	61.2422	59.7301	62.0328	61.2664
180	81.2422	79.2363	81.8940	81.2557
200	101.2422	98.7425	101.7764	101.2502

Tabelle 6.2: Optionspreise für einen Call für Merton-Modell und Kou-Modell

Kurs	BLS	Ruin	Log	Kou
20	78.7578	76.8132	81.5464	78.7578
40	58.7578	57.3070	61.2694	58.7578
60	38.7578	37.8008	40.9934	38.7588
80	18.7627	18.2995	20.7318	18.7803
100	2.3928	2.3338	4.8465	2.5246
120	0.0120	0.0117	2.5892	0.1119
140	2.8626e-006	2.7919e-006	2.1749	0.0469
160	8.7418e-011	8.5260e-011	1.8142	0.0242
180	7.3109e-016	7.1304e-016	1.5026	0.0135
200	2.7534e-021	2.6854e-021	1.2383	0.0080

Tabelle 6.3: Optionspreise für einen Put für Merton-Modell und Kou-Modell

## 5.2 Monte-Carlo-Verfahren

In Abschnitt 4 wurde das Monte-Carlo-Verfahren vorgestellt. Wir beschränken uns hier auf die Simulation an festen Zeitpunkten, da wir nur am Kurs zum Endzeitpunkt  $T$  interessiert sind und nicht an seiner Entwicklung über die Laufzeit. Es werden die bereits bekannten Fälle des Plötzlichen Ruins, der Lognormalverteilten Sprünge und der doppel-exponentialverteilten Sprünge untersucht. Dazu wird das Monte-Carlo-Verfahren angewendet und für steigende Anzahl der Monte-Carlo-Iterationen die Konvergenz gegen den Referenzpreis  $V_R$ , der mittels der geschlossenen Lösung ermittelt wurde, betrachtet. Den mittels des Monte-Carlo-Verfahrens berechneten Optionspreis bezeichnen wir mit  $V_{MC}$ . Um die Konvergenz gegen die exakte Lösung betrachten zu können, wird der relative Fehler berechnet.

$$e_{rel} = \frac{|V_{MC} - V_R|}{|V_R|} \quad (49)$$



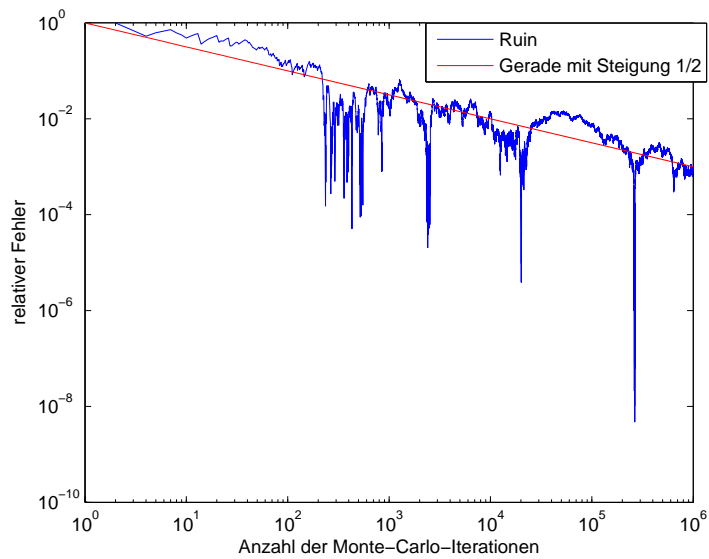


Abbildung 6.5: Konvergenz des Monte-Carlo-Verfahrens für den Fall des Plötzlichen Ruins

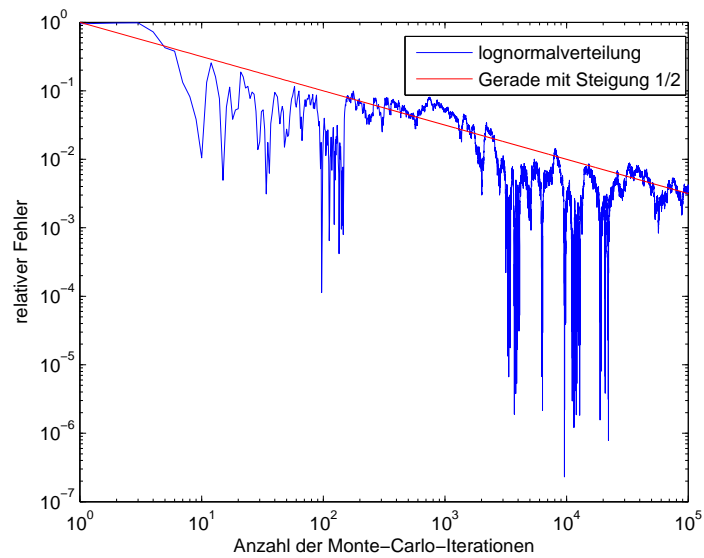


Abbildung 6.6: Konvergenz des Monte-Carlo-Verfahrens für den Fall der lognormalverteilte Sprünge

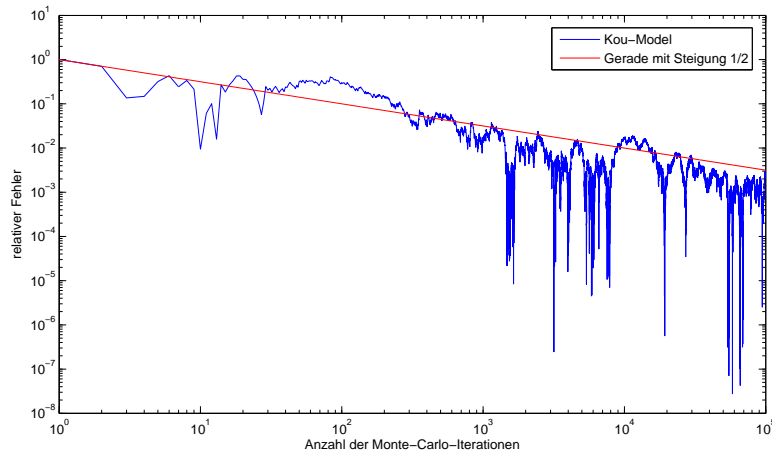


Abbildung 6.7: Konvergenz des Monte-Carlo-Verfahrens für den Fall der Doppelt-Exponential-Sprünge

In Abbildungen 6.5, 6.6 und 6.7 sind die relativen Fehler abhängig von der Anzahl der Monte-Carlo-Iterationen dargestellt. Zusätzlich wurde eine Gerade mit der Steigung  $(-\frac{1}{2})$  abgebildet, um die durchschnittliche Konvergenz des Verfahrens zu verdeutlichen. Die Konvergenz des Monte-Carlo-Verfahrens ist nicht monoton, es existieren Sprünge nach oben und unten, die eine Eigenschaft des Monte-Carlo-Verfahrens sind. Es kann auch in diesem Fall beobachtet werden, dass der relative Fehler im Mittel mit einer Konvergenzrate von  $\frac{1}{2}$  klein wird.

## 6 Fazit

In dieser Arbeit wurden die Europäische Optionen in den Sprung-Diffusions-Modellen von Merton und dem Modell von Kou bewertet. So stellen die geschlossenen Lösungen für das Merton-Modell als Anwendung der Black-Scholes-Formel eine einfache Möglichkeit zur Berechnung eines Optionspreises dar. Die Verwendung einer analytischen Lösung für Merton ist allerdings nur eingeschränkt, d.h. für zwei spezielle Sprungverteilungsfunktionen (Plötzlicher Ruin und die Lognormalverteilung) möglich. Das Kou-Modell hingegen, hat eine geschlossene Lösung für Doppel-Exponentialverteilte Sprünge. Eine flexible Lösungsmöglichkeit zur Bestimmung eines Optionspreises ist die Verwendung des Monte-Carlo-Verfahrens für die Simulation der Kursbewegung mit zugrunde liegendem Sprung-Diffusions-Modell. In diesem Fall ist das Monte-Carlo-Verfahren zur Ermittlung des Optionspreises nur einmal anzuwenden. Dieses Verfahren konvergiert mit einer Konvergenzrate von  $\frac{1}{2}$ .

Wie alle anderen Modelle, die auf Lévy Prozessen basieren, lässt das Kou-Modell eine empirische Beobachtung vermissen, nämlich die mögliche Abhängigkeit zwischen Renditen der Underlyings (der sogenannte "volatility clustering effect"), weil das Modell unabhängige Inkremente unterstellt. Eine Möglichkeit die Abhängigkeit mit einzubeziehen, wäre die Nutzung anderer Punktprozesse  $\tilde{N}(t)$  mit abhängigen Inkrementen anstelle des Poisson-Prozesses  $N(t)$ . Es muss natürlich die Unabhängigkeit zwischen der Brownschen Bewegung, den Sprunghöhen und  $\tilde{N}(t)$  beibehalten werden. Das so modifizierte Modell hat keine unabhängigen Inkremente mehr, ist aber einfach die geschlossene Lösungsformel für Call- und Put-Optionen zu erhalten. Andererseits scheint es schwer analytische Lösungen für Pfadabhängige Optionen durch Nutzung von  $\tilde{N}(t)$  anstelle von  $N(t)$  zu erhalten.

## Literatur

- [1] T. Björk, Y. Kabanov, and W. Runggaldier. Bond market structure in the presence of marked point processes. *Mathematical Finance*, 7(2):211–239, 1997.
- [2] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *The journal of political economy*, pages 637–654, 1973.
- [3] P. Glasserman. *Monte Carlo methods in financial engineering*. Springer Verlag, 2004.
- [4] S.G. Kou. A jump-diffusion model for option pricing. *Management Science*, pages 1086–1101, 2002.
- [5] S.G. Kou and H. Wang. Option pricing under a double exponential jump diffusion model. *Management Science*, pages 1178–1192, 2004.
- [6] Reiferscheid Melanie. Numerische simulation von sprung-diffusionsprozessen zur optionspreisbewertung. *Diplom Arbeit*, 2006.
- [7] R.C. Merton. Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1):141–183, 1973.
- [8] R.C. Merton. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous\* 1. *Journal of financial economics*, 3(1-2):125–144, 1976.
- [9] J. Toivanen. Numerical valuation of European and American options under Kous jump-diffusion model. *SIAM J. Sci. Comput*, 30:1949–1970, 2008.
- [10] S. Trautmann and M. Beinert. *Stock price jumps and their impact on option valuation*. Citeseer, 1995.