

Quadraturverfahren zur Bewertung exotischer Optionen

Bachelorarbeit

vorgelegt von

Matthias Bausch

Frankfurterstr. 34

61206 Wöllstadt

Matrikelnummer: 3793097

Studiengang: Mathematik

eingereicht bei

Prof. Dr. Thomas Gerstner

Fachbereich Informatik und Mathematik

Institut für Mathematik

Goethe Universität Frankfurt am Main

Frankfurt am Main, den 13. September 2011

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	I
Ehrenwörtliche Erklärung	II
1 Einleitung	1
2 Grundlagen	3
2.1 Quadraturverfahren	3
2.2 Exotische Optionen	5
2.3 Das Black-Scholes-Modell	7
3 Ansatz zur Optionspreisbewertung	10
3.1 Umformung der Black-Scholes-PDE	10
3.2 Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung	11
4 Methode und allgemeine Anwendung	13
4.1 Plain Vanilla Optionen	13
4.2 Optionen mit Pfadeigenschaften	16
5 Implementierung	19
6 Anwendung auf exotische Optionen	20
6.1 Digitale Optionen	20
6.2 Barrier-Optionen	20
6.3 Zusammengesetzte Optionen	21
6.4 Bermuda-Optionen	22
6.5 Lookback-Optionen	23
6.6 Numerische Ergebnisse	25
7 Schlussbemerkungen und Fazit	31
Literatur	32

Abbildungsverzeichnis

1	Bewertung einer Europäischen Call Option	14
2	Europäische Call Option	16
3	Bewertung einer diskreten Down-Out Call Option	18
4	Asset-Or-Nothing Call Option	27
5	Diskrete Down-Out Call Option	27
6	Call on Call Option	29
7	Bermuda Put Option	29
8	Variable Lookback Put Option	30

Ehrenwörtliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorstehende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß anderer Schriften entnommen wurden, sind unter Angabe der Quellen kenntlich gemacht. Keine weiteren Personen waren an der geistigen Herstellung der vorliegenden Arbeit beteiligt.

Wöllstadt, den 13. September 2011

(Matthias Bausch)

1 Einleitung

Wie können Optionen bewertet werden, zu denen keine geschlossenen Lösungen existieren? Die Antwort lautet: Numerische Verfahren.

In Hinblick auf diese Frage wurden in der Vergangenheit meist Baumverfahren, Finite-Differenzen- oder Monte-Carlo-Methoden herangezogen. Im Gegensatz dazu behandelt diese Bachelorarbeit den Einsatz von Quadraturverfahren (QUAD) bei der Bewertung von exotischen Optionen, also Optionen, die kompliziertere Auszahlungsstrukturen besitzen wie einfache Standard-Optionen. Die Grundidee besteht darin, den Optionswert als mehrdimensionales Integral in eindimensionale Integrale zu zerlegen, die daraufhin durch Quadraturformeln approximiert werden.

Die Genauigkeit des Verfahrens wird erhöht, indem die Schrittweite der Quadraturformel h verkleinert wird. Dies hat allerdings zur Folge, dass sich der Rechenaufwand erhöht. QUAD jedoch schafft es, durch Reduzierung der Dimension und Ausnutzung der herausragenden Konvergenzeigenschaften von Quadraturformeln eine hohe Genauigkeit bei gleichzeitig geringen Rechenkosten zu erreichen.

Die Methode ist allgemein anwendbar und zeigt insbesondere beim Preisen von pfadabhängigen Optionen mit diskreten Zeitpunkten ihre Stärken. Als Anwendungsbeispiele betrachten wir deshalb folgende Optionstypen:

Digitale-, Barrier-, Zusammengesetzte-, Bermuda- und Lookback Optionen. Ferner existieren entsprechende Verfahren für Asiatische- oder Amerikanische Optionen, für die jedoch mehr Vorarbeit notwendig ist.

Der große Vorteil von QUAD gegenüber anderen numerischen Verfahren liegt in der Vermeidung eines (bedeutsamen) Verteilungsfehlers und in der Tatsache, dass keine Bedingungen an die Auszahlungsfunktion gestellt werden müssen. Baum- oder Finite-Differenzen-Verfahren reduzieren zwar durch Gitterverfeinerung den Verteilungsfehler, allerdings geht dies Hand in Hand mit deutlich höheren Rechenzeiten. Zum Beispiel benötigt ein Baumverfahren für die doppelte Exaktheit einen vierfachen Rechenaufwand, während die QUAD Methode bei einem vierfachen Rechenaufwand die Exaktheit mit Faktor 16 erhöht (bei Extrapolation steigt dieser Faktor bis 256).

QUAD kann als „der perfekte Baum“ angesehen werden, da es ähnlich zu Multinomialbäumen auf Rückwärtsverfahren zurückgreift, andererseits aber die hohe Flexibilität besitzt, Knoten frei und in großer Anzahl zu wählen. Des Weiteren gehen nur die den Optionspreis bestimmenden Zeitpunkte in die Bewertung mit ein, sodass auf zwischenzeitliche Zeitschritte gänzlich verzichtet werden kann.

Die eigentliche Arbeit gliedert sich in sechs Abschnitte. Zunächst erfolgt eine Einführung in allgemeine Quadraturverfahren, exotische Optionen und das Black-Scholes-Modell, was im Anschluss den Übergang zum Lösungsansatz liefert. Dieser Abschnitt schließt mit einer geschlossenen Integrallösung für Optionen, die der Black-Scholes-Differentialgleichung folgen, ab. In Abschnitt 4 wird die genaue Untersuchung der QUAD Methode vorgenommen. Unter Verwendung des in Abschnitt 5 vorgestellten Algorithmus wird anschließend in Abschnitt 6 die QUAD Methode auf die zuvor genannten Optionsklassen angewandt. Die entsprechenden Resultate werden am Ende dieses Teils in Tabellen und Graphiken präsentiert. Den Abschluss bildet das Fazit und die Zusammenfassung der Ergebnisse.

2 Grundlagen

2.1 Quadraturverfahren

Die Bestimmung arbitragefreier Optionspreise ist eng verbunden mit der Berechnung von bestimmten Integralen. In vielen Fällen sind jedoch die auftretenden Integrationen nicht analytisch ausführbar, oder ihre analytische Durchführung erfordert einen zu hohen Rechenaufwand. Aus diesem Grund wird der zu berechnende Integralausdruck $\int_a^b f(x)dx$ durch numerische Integration (*Numerische Quadratur*) angenähert ausgewertet.

Definition 1 Ein auf $C[a, b]$ definiertes lineares Funktional Q_n der Form

$$Q_n(f) := \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) \quad (1)$$

heißt Quadraturformel n -ter Ordnung mit paarweise verschiedenen Stützstellen x_0, \dots, x_n aus dem Intervall $[a, b]$ und Gewichten $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Im Folgenden betrachten wir ausschließlich die Quadratur mit Polynomen, welche in der nächsten Definition eingeführt wird.

Definition 2 Eine Quadraturformel der Gestalt (1) heißt Interpolationsquadraturformel der Ordnung n , falls

$$\sum_{i=0}^n a_i f(x_i) = \int_a^b P_n(x) dx, \quad \forall f \in C[a, b]. \quad (2)$$

Dabei sei P_n das (eindeutig bestimmte) Interpolationspolynom zu f mit den Stützstellen x_0, \dots, x_n .

Aufgrund der Eindeutigkeit und Existenz des Interpolationspolynoms P_n existiert genau eine Interpolationsquadraturformel der Ordnung n zu paarweise verschiedenen Stützstellen.

Wählt man nun eine äquidistante Zerlegung $\Delta = \{x_i : x_i = a + ih, i = 0, \dots, n\}$ mit $h = \frac{b-a}{n}$ und den Polynominterpolant in Lagrange-Darstellung, also

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) \quad \text{mit} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n, \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad (3)$$

so ergeben sich für allgemeines n die *Newton-Cotes-Formeln*:

$$I(f) := \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i(x)dx = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) \quad (4)$$

mit Gewichten

$$a_i = \int_a^b L_i(x)dx = h \int_0^n \prod_{\substack{0 \leq j \leq n, \\ j \neq i}} \frac{t-j}{i-j} dt \quad (\text{Substitution: } x = a + ht) \quad (5)$$

Beispiel 3 (Simpson-Regel) Für $n = 2$ erhalten wir folgende Gewichte:

$$\begin{aligned} a_0 &= h \int_0^2 \frac{t-1}{0-1} \frac{t-2}{0-2} dt = \frac{h}{2} \int_0^2 (t-1)(t-2) dt = \frac{h}{3} \\ a_1 &= h \int_0^2 \frac{t-0}{1-0} \frac{t-2}{1-2} dt = -h \int_0^2 t(t-2) dt = \frac{4h}{3} \\ a_2 &= h \int_0^2 \frac{t-0}{2-0} \frac{t-1}{2-1} dt = \frac{h}{2} \int_0^2 t(t-1) dt = \frac{h}{3} \end{aligned}$$

Die Quadraturformel lautet nun

$$\int_a^b P_2(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad (6)$$

was der sogenannten *Simpson-Regel* entspricht.

Statt immer höhere Polynome zur Quadratur zu verwenden, unterteilt man das Intervall $[a, b]$ in N Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $x_i = a + ih$, $0 \leq i \leq N$, mit Länge $h = \frac{b-a}{N}$. In den Teilintervallen werden jeweils die elementaren Quadraturformeln angewandt, sodass sich das Gesamtintegral als Summe der Teilintegrale ergibt (*iterierte Quadraturformeln*).

Bei der *Simpsonsumme* ($n=2$) ergibt sich als Näherungsformel für jedes der N Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, N-1$

$$I_i = \frac{h}{6} \left(f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1}) \right)$$

und somit für das Gesamtintervall $[a, b]$:

$$S(h) = \sum_{i=0}^{N-1} I_i = \frac{h}{6} (f(a) + 4f(a + \frac{1}{2}h) + 2f(a+h) + \dots + 2f(b-h) + 4f(b - \frac{1}{2}h) + f(b)) \quad (7)$$

Satz 4 Für $f \in C^4[a, b]$ gilt für den Quadraturfehler der Simpsonsumme:

$$S(h) - I(f) = \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi) \text{ mit } \xi \in [a, b] \quad (8)$$

Beweis: [5], S. 48

Die Simpsonsumme ist somit ein Verfahren vierter Ordnung, d.h. bei linear wachsendem Aufwand reduziert sich der Fehler des Verfahrens biquadratisch in N .

Die Robustheit und leichte Implementierung zählen ebenfalls zu den Stärken dieser Quadraturformel. Später werden wir deshalb auf dieses Verfahren zurückgreifen.

2.2 Exotische Optionen

Exotische Optionen sind Finanzderivate mit Pfadeigenschaften oder außergewöhnlichen Auszahlungsstrukturen, die von Plain Vanilla Optionen (Standard-Optionen) abgeleitet sind. Diese Produkte finden eine große Verbreitung im OTC-Handel, da sie im Allgemeinen profitabler als Standard-Optionen sind.

Es folgt nun ein Kurzüberblick über alle exotischen Optionen, welche in Abschnitt 6 behandelt werden (im Folgenden sei stets $T_M = T$ der Fälligkeitstermin).

Definition 5 (Digitale Option) Bei Digitalen Call (Put) Optionen wird zum Ausübungzeitpunkt, vorausgesetzt der Basiswert liegt über (unter) dem Basispreis, entweder der Preis des Wertpapiers $S(T)$ (Asset-Or-Nothing) oder ein fester Betrag B (Cash-Or-Nothing) gezahlt. Die Auszahlung für einen Call ist also:

$$V(S, T) = \begin{cases} S(T) & \text{falls } S(T) > K \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{Asset-Or-Nothing}) \quad (9)$$

$$V(S, T) = \begin{cases} B & \text{falls } S(T) > K \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{Cash-Or-Nothing}) \quad (10)$$

Definition 6 (Diskrete Barrier-Option) Bei diskreten Barrier-Optionen hängt der Pay-off davon ab, ob der Basiswert vorgegebene Schranken B_1, \dots, B_M (Barrier) an bestimmten

Zeitpunkten über- oder unterschreitet. Knock-Out Optionen werden wertlos, sobald eine Schranke übertreten (Up-Out) oder unterschritten (Down-Out) wird. Knock-In-Optionen sind solange wertlos, bis eine Schranke übertreten (Up-In) bzw. unterschritten (Down-In) wird. Als Beispiel hat eine Up-Out Put Option die Auszahlung:

$$V(S, T) = \begin{cases} (K - S(T))^+ & \text{falls } S(T_1) < B_1, \dots, S(T_M) < B_M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (11)$$

Das Besondere bei diskreten Barrier-Optionen ist also, dass eine Über- bzw. Unterschreitung der Schranken zwischen den Beobachtungszeitpunkten die Option nicht wertlos (Knock-Out) oder wertvoll (Knock-In) macht.

Definition 7 (Zusammengesetzte Option) Eine Zusammengesetzte Option ist eine Menge von Optionen auf andere Optionen. Im zweidimensionalen Fall erhält der Käufer das Recht, zu einem späteren Zeitpunkt T_1 eine gewöhnliche Option mit Fälligkeit T_2 und Basispreis K_2 zum Preis K_1 zu erwerben oder zu verkaufen. Der Basiswert ist somit eine eigenständige Option, die sogenannte Tochteroption. Zum Beispiel besitzt der Käufer bei einem Put on Put in T_1 das Recht, die Short-Position einer Verkaufsoption einzunehmen.

Definition 8 (Bermuda-Option) Bei sogenannten Bermuda-Optionen ist der Ausübungszeitraum eine vorgegebene Zahl von Zeitpunkten $\tau = \{T_1, \dots, T_M\}$ mit $T_1 \geq 0$.

Bermuda-Optionen lassen sich ebenfalls in Call- und Put Optionen unterteilen. Da diese bei gleicher Fälligkeit T mehr Rechte als Europäische und weniger Rechte als Amerikanische Optionen beinhalten, liegt ihr Preis zwischen diesen Optionstypen.

Definition 9 (Lookback-Option) Die Auszahlung von (diskreten) Lookback-Optionen ist abhängig vom Maximum oder Minimum des Underlyingkurses an bestimmten Zeitpunkten. Man unterscheidet Lookback-Optionen mit festem und variablem Basispreis (Bsp.: Lookback Call Option):

$$V(S, T) = \left(\max_{t \in \{T_0, \dots, T_M\}} S(t) - K \right)^+ \quad (\text{fester Basispreis}) \quad (12)$$

$$V(S, T) = S(T) - \min_{t \in \{T_0, \dots, T_M\}} S(t) \quad (\text{variabler Basispreis}) \quad (13)$$

Ein sogenannter *variabler Lookback Call* gibt also dem Käufer das Recht, den Basispreis zum niedrigsten Kurs der Zeitpunkte T_0, \dots, T_M zu kaufen.

2.3 Das Black-Scholes-Modell

Das Black-Scholes-Modell ist ein finanzmathematisches Modell zur Bewertung von Finanzoptionen, das von Fischer Black und Myron Scholes im Jahr 1973 veröffentlicht wurde. Es trifft folgende idealisierte Annahmen:

- keine Arbitragemöglichkeiten,
- keine Transaktionskosten oder Steuern,
- Underlying S zahlt keine Dividende während der Optionslaufzeit,
- konstante Volatilität σ des Wertpapiers S ,
- konstanter Zinssatz r , zu dem jederzeit beliebig Geld geliehen oder angelegt werden kann,
- Leerverkäufe sind erlaubt und alle Wertpapiere sind beliebig teilbar.

Ausgangspunkt des Modells ist folgende Definition:

Definition 10 (Black-Scholes-Modell) *Im Black-Scholes-Modell folgt der Preis des zugrunde liegenden Wertpapiers der einer geometrischen Brownschen Bewegung mit konstanter Drift μ und konstanter Volatilität σ*

$$S(t) := S(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)} \quad (14)$$

wobei $W(t)$ ein Wiener-Prozess ist. Der Prozess $S(t)$, welcher lognormalverteilt ist, erfüllt die Black-Scholes-SDE:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \quad (15)$$

Der erste Term auf der rechten Seite von (15) liefert das prozentuale konstante Wachstum mit Drift μ . Der zweite Term überlagert dieses exponentielle Wachstumsverhalten mit prozentual konstanten Schwankungen.

Um stochastische Differentialgleichungen lösen zu können, benötigen wir noch ein Hilfsmittel aus der Theorie der stochastischen Prozesse:

Satz 11 (Itô-Lemma für geometrische Brownsche Bewegung) Sei $S(t)$ eine geometrische Brownsche Bewegung und $V(S, t)$ eine Funktion mit stetigen Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial S}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ und $\frac{\partial V}{\partial t}$. Dann folgt $V(S, t)$ dem Itô-Prozess

$$dV(S, t) = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW(t). \quad (16)$$

Beweis: [4], S. 27

Für die Herleitung der *Black-Scholes-Differentialgleichung (PDE)* betrachten wir das folgende Portfolio:

Kaufe eine Option $V(S, t)$ und verkaufe den Bruchteil $\Delta \cdot S$ des Basiswertes.

Dies ist möglich, da wir Leerverkäufe zulassen. Der Wert dieses Portfolios ist mit $\pi = V(S, t) - \Delta \cdot S$ gegeben. Dann gilt

$$d\pi = dV(S, t) - \Delta dS$$

und mit Gleichung (15) sowie (16) folgt

$$\begin{aligned} d\pi &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW(t) - \Delta dS \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW(t) \right) - \Delta dS \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dS \end{aligned}$$

Setzt man nun $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$, so verschwindet der Zufallsterm $dW(t)$ und wir erhalten:

$$d\pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt$$

Da wir Arbitragefreiheit voraussetzen, muss der Wert von π gleich dem Wert einer risikolosen Anlage sein (Duplikationsstrategie), d.h.

$$d\pi = r\pi dt$$

Hieraus folgt

$$d\pi = r(V - \frac{\partial V}{\partial S} S) dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt$$

und insgesamt erhalten wir die berühmte *Black-Scholes-Differentialgleichung (PDE)*:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (17)$$

wobei $0 \leq t \leq T$ und der Kurs des Basiswertes $S(t)$ eine geometrische Brownsche Bewegung ist.

Der Ansatz von Black und Scholes ist nicht auf die Preisbestimmung europäischer Optionen beschränkt, sondern lässt sich auf jedes Finanzderivat V bezüglich eines Basiswertes mit Kurs $S(t)$ anwenden, falls $S(t)$ einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt und wenn der Preis V des Finanzderivats bis zu seiner Ausübung nur eine Funktion des aktuellen Kurses und der Zeit ist: $V = V(S, t)$. Aus diesem Grund muss man die Black-Scholes-Gleichung über entsprechende End- und Randbedingungen dem jeweiligen Derivat anpassen, z.B. für den Europäischen Put:

- Endbedingung $t = T$: $V(S, T) = (K - S(T))^+$,
- 1. Randbedingung $S(t) = 0$: $V(0, t) = Ke^{-r(T-t)}$,
- 2. Randbedingung $S(t) \rightarrow \infty$: $V(\infty, t) \rightarrow 0$.

3 Ansatz zur Optionspreisbewertung

Als Ansatzpunkt betrachten wir die hergeleitete Black-Scholes-Differentialgleichung (17). Ziel ist es nun, diese mittels geschickter Substitutionen in eine einfache Gleichung, die *Wärmeleitungsgleichung*, zu transformieren, von der die Fundamentallösung bekannt ist. Die Lösung zu den Endbedingungen führt dann auf ein Integral, welches die Basis für die Bewertung von exotischen Optionen bildet.

3.1 Umformung der Black-Scholes-PDE

Wir beginnen mit diesen Transformationen:

$$S(t) = Ke^x, \quad S(T) = Ke^y, \quad t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, \quad V(S, t) = V(Ke^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2}) =: v(x, \tau) \quad (18)$$

Über die folgenden partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial V}{\partial t} \left(-\frac{2}{\sigma^2}\right), & \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial S} S, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial S} S \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \frac{\partial S}{\partial x} S + \frac{\partial V}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} S^2 + \frac{\partial V}{\partial S} S = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} S^2 + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

erhalten wir die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV \\ &= -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + r \frac{\partial v}{\partial x} - rv \\ &= -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) - rv. \end{aligned}$$

Dividiert durch $-\frac{\sigma^2}{2}$ ergibt sich

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \left(1 - \frac{2r}{\sigma^2} \right) + \frac{2r}{\sigma^2} v = 0. \quad (19)$$

Wir definieren uns nun die Variable z über die Beziehung $v(x, \tau) =: Ke^{-\frac{1}{2}kx - (\frac{1}{4}k^2 + k + 1)\tau} z(x, \tau)$, wobei $k := \frac{2r}{\sigma^2} - 1$ und berechnen auch hier die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial \tau} &= -\left(\frac{1}{4}k^2 + k + 1\right)v + Ke^{-\frac{1}{2}kx - (\frac{1}{4}k^2 + k + 1)\tau} \frac{\partial z}{\partial \tau} \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{2}kv + Ke^{-\frac{1}{2}kx - (\frac{1}{4}k^2 + k + 1)\tau} \frac{\partial z}{\partial x} \\
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{1}{4}k^2v - kKe^{-\frac{1}{2}kx - (\frac{1}{4}k^2 + k + 1)\tau} \frac{\partial z}{\partial x} + Ke^{-\frac{1}{2}kx - (\frac{1}{4}k^2 + k + 1)\tau} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

Eingesetzt in (19) führt dies zur Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= -\left(\frac{1}{4}k^2 + k + 1\right)v + Ke^{-\frac{1}{2}kx - (\frac{1}{4}k^2 + k + 1)\tau} \frac{\partial z}{\partial \tau} - \frac{1}{4}k^2v + kKe^{-\frac{1}{2}kx - (\frac{1}{4}k^2 + k + 1)\tau} \frac{\partial z}{\partial x} \\
&\quad - Ke^{-\frac{1}{2}kx - (\frac{1}{4}k^2 + k + 1)\tau} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{2}k^2v - kKe^{-\frac{1}{2}kx - (\frac{1}{4}k^2 + k + 1)\tau} \frac{\partial z}{\partial x} + (k + 1)v
\end{aligned}$$

und nach Wegfallen einiger Terme und einer Multiplikation schließlich zur *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \tag{20}$$

im Gebiet $[0, \frac{1}{2}\sigma^2 T] \times (-\infty, \infty)$. Durch die Umkehrung der Zeitachse wurden aus Endbedingungen Anfangsbedingungen:

$$V(S, T) = v(y, 0) = Ke^{-\frac{1}{2}ky} z(y, 0)$$

und somit

$$z(y, 0) = \frac{1}{K} e^{\frac{1}{2}ky} V(S, T). \tag{21}$$

3.2 Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung

Die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung (siehe: [10], S. 74) ist

$$G_\tau(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}} \tag{22}$$

und die Lösung zu den Anfangsbedingungen $z(y, 0)$ erreicht man durch die Faltung

$$z(x, \tau) = z(y, 0) * G_\tau(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{K} e^{\frac{1}{2}ky} V(S, T) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau}} dy. \tag{23}$$

Die gesuchte Lösung $V(S, t)$ erhält man über

$$V(S, t) = Ke^{-\frac{1}{2}kx - (\frac{1}{4}k^2 + k + 1)\tau} z(x, \tau)$$

zurück und damit

$$V(S, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}kx - (\frac{1}{4}k^2 + k + 1)\frac{\sigma^2}{2}\Delta t - \frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\Delta t} + \frac{1}{2}ky} V(S, T) dy \quad (24)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}kx - \frac{1}{8}\sigma^2 k^2 \Delta t - r\Delta t - \frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\Delta t} + \frac{1}{2}ky} V(S, T) dy \quad (25)$$

$$= A(x) \int_{-\infty}^{\infty} B(x, y) V(S, T) dy \quad (26)$$

wobei

$$A(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\Delta t}} e^{-\frac{1}{2}kx - \frac{1}{8}\sigma^2 k^2 \Delta t - r\Delta t}$$

und

$$B(x, y) := e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2\Delta t} + \frac{1}{2}ky}$$

sowie

$$\Delta t := T - t = \frac{2}{\sigma^2}\tau.$$

Fortan wird der Integrand mit $f(x, y)$ bezeichnet, sodass Gleichung (26) zu

$$V(S, t) = V(Ke^x, t) = A(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \quad (27)$$

wird, wobei der Integrand gegeben ist durch

$$f(x, y) := B(x, y)V(S, T) = B(x, y)V(Ke^y, T). \quad (28)$$

Die Lösung (27) beinhaltet ein Integral, welches im Allgemeinen nicht analytisch ausgewertet werden kann. Für die Bewertung exotischer Optionen werden deshalb numerische Techniken benötigt.

4 Methode und allgemeine Anwendung

In diesem Kapitel führen wir zunächst die QUAD Methode an einer Vanilla Call Option vor. Dieser einfache Optionstyp zeichnet sich durch einen Beobachtungszeitpunkt (Fälligkeitstermin) und einen einzigen Berechnungszeitschritt aus. Mit der geschlossenen Lösungsformel für europäische Optionen im Black-Scholes-Modell verifizieren wir dann die Exaktheit der Quadraturmethode. Im zweiten Teil wird die QUAD Methode auf Optionen mit Pfadeigenschaften als wichtige Vertreter exotischer Optionen erweitert.

4.1 Plain Vanilla Optionen

Im Falle einer Europäischen Call Option ist der Payoff im Fälligkeitstermin $V(S, T) = (S(T) - K)^+ = K(e^y - 1)^+$ (Umformung in (18) nach y). Der Integrand (28) ist somit

$$f(x, y) = B(x, y)K(e^y - 1)^+. \quad (29)$$

Nach Satz 4 konvergiert die Simpsonsumme für 4-mal stetig differenzierbare Funktionen mit h^4 . Offensichtlich ist jedoch die erste Ableitung der Auszahlung einer Call Option im Basispreis K nicht stetig (da für $S(T) < K$, $\frac{\partial V}{\partial S} = 0$, für $S(T) > K$, $\frac{\partial V}{\partial S} = 1$). Bei anderen Optionstypen treten entsprechend andere Unstetigkeiten auf. Somit ist es für die Exaktheit des Verfahrens notwendig, das Integral in zwei Teilintegrale mit Grenze $y = 0$ ($S = K$) aufzuteilen.

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich, da für $y < 0$ ($S < K$) die Auszahlung 0 beträgt und somit das eine Teilintegral keinen Beitrag zum Optionswert leistet.

Der Integrationsbereich in (27) ist nach oben weiterhin unbeschränkt und muss deswegen passend eingeschränkt werden. Als obere Integrationsgrenze wählen wir deshalb $y_{max} = x_0 + 10\sigma\sqrt{\Delta t}$ mit $x_0 := \ln(\frac{S(t)}{K})$ (entsprechend $y_{min} = x_0 - 10\sigma\sqrt{\Delta t}$ für eine Put-Option). Der Grund liegt darin, dass die Wahrscheinlichkeit einer Schwankung eines Wertpapiers, welches einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt, über die 10-fache Standardabweichung hinaus innerhalb einer Zeitperiode verschwindend klein und demzufolge vernachlässigbar ist.

Als Zwischenlösung ergibt sich somit

$$V(S, t) \approx A(x) \int_0^{y_{max}} f(x, y) dy.$$

Nun definieren wir mit N^+ die Intervallanzahl im Bereich $[0, y_{max}]$, also

$$N^+ = \left\lceil \frac{y_{max}}{h} \right\rceil,$$

wobei $\lceil a \rceil$ die nächste ganze Zahl zu a angibt und h der Länge der Intervalle entspricht.

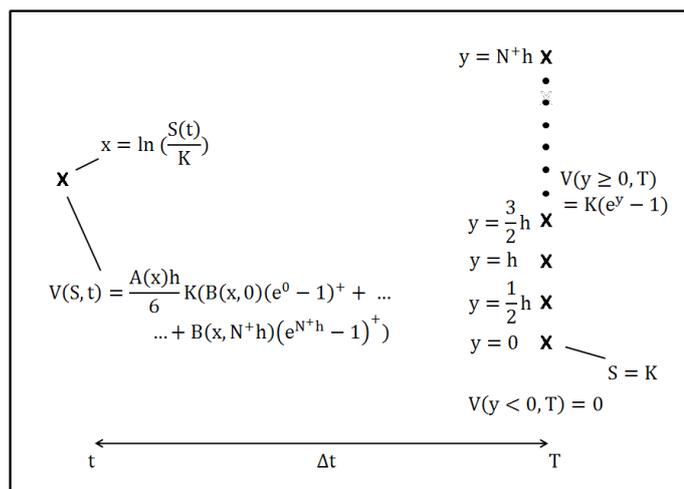


Abbildung 1: Bewertung einer Europäischen Call Option

Zur Implementierung der Simpsonsumme wählen wir nun die Grenzen $a = 0$ und $b = N^+h$, sodass mit Gleichung (7) folgt

$$\begin{aligned} V(S, t) &\approx A(x) \int_0^{N^+h} f(x, y) dy \\ &\approx \frac{A(x)h}{6} \left(f(x, 0) + 4f(x, \frac{1}{2}h) + 2f(x, h) + \dots + 4f(x, N^+h - \frac{1}{2}h) + f(x, N^+h) \right) \end{aligned}$$

und schließlich mit der Definition von $f(x, y)$ in (28) und (29)

$$\begin{aligned} V(S, t) &\approx \frac{A(x)h}{6} K \left(B(x, 0)(e^0 - 1)^+ + 4B(x, \frac{1}{2}h)(e^{\frac{1}{2}h} - 1)^+ + \dots \right. \\ &\quad \left. + 4B(x, N^+h - \frac{1}{2}h)(e^{N^+h - \frac{1}{2}h} - 1)^+ + B(x, N^+h)(e^{N^+h} - 1)^+ \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Somit besteht das QUAD Verfahren im einfachen Fall ausschließlich aus der Anwendung einer iterierten Quadraturformel.

Die Bewertung kann für alle möglichen Assetpreise S (bzw. x) und Laufzeiten Δt schnell wiederholt werden (siehe: Abb. 1).

Zur weiteren Reduzierung des Verteilungsfehlers empfiehlt sich die *Richardson-Extrapolation* (QUADext). Dabei werden Kalkulationen mit zwei verschiedenen Schrittweiten h_1 und h_2 durchgeführt, welche die entsprechenden Optionswerte V_1 und V_2 liefern. Einen verbesserten Wert V_{ext} erhält man nun durch die Extrapolation (siehe: [2], S. 13)

$$V_{ext} = \frac{h_1^d V_2 - h_2^d V_1}{h_1^d - h_2^d}, \quad (31)$$

mit d als Ordnung des Verfahrens ohne Extrapolation (also in unserem Fall $d = 4$ für die Simpsonsumme).

Tabelle 1 und Abbildung 2 zeigen die Resultate der Quadraturmethode mit und ohne Extrapolation, angewandt auf eine Europäische Call Option. Wir stellen fest, dass bei Verdopplung der Schrittzahl N der Fehler mit Faktor 16 (QUAD) bzw. > 100 (QUADext) reduziert werden kann.

Des Weiteren ist in Abbildung 2 erkennbar, dass in beiden Graphiken die jeweils gleichfarbenen Geraden eine identische Steigung besitzen (blau: -4 , grün: -7). Dies deutet auf einen linearen Zusammenhang zwischen der Schrittzahl N und dem Rechenaufwand A hin, sodass die Eigenschaften der Simpsonsumme verifiziert werden können.

ABSOLUTER FEHLER		
N	QUAD (Zeit/Sek.)	QUADext (Zeit/Sek.)
Europäische Call Option		
10	0.0000629509 (0.00)	0.0000019402 (0.01)
20	0.0000039072 (0.01)	0.0000000102 (0.01)
30	0.0000007708 (0.01)	0.0000000007 (0.02)
40	0.0000002438 (0.01)	0.0000000001 (0.02)
50	0.0000000998 (0.01)	0.0000000000 (0.03)

Tabelle 1: Parameter sind wie folgt:
 $S_0 = 100, K = 105, \sigma = 0.4, r = 0.06$ sowie
 $\Delta t = 1$. QUAD und QUADext wurden
mit Simpsonsumme berechnet. N ist so
gewählt, dass $h = \sqrt{\Delta t}/N$.

- Aufwand: $A = O(N^1)$
- Genauigkeit: $\varepsilon = O(N^{-4})$ (QUAD), $\varepsilon = O(N^{-7})$ (QUADext)
- Gesamtkomplexität: $\varepsilon(A) = O(A^{-4})$ (QUAD), $\varepsilon(A) = O(A^{-7})$ (QUADext)

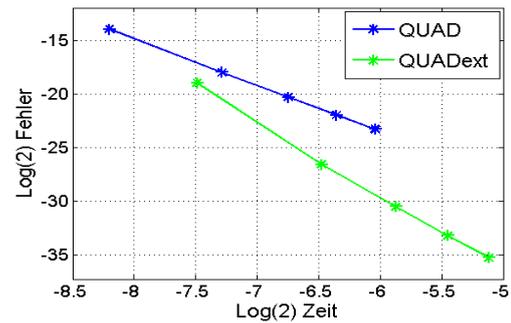
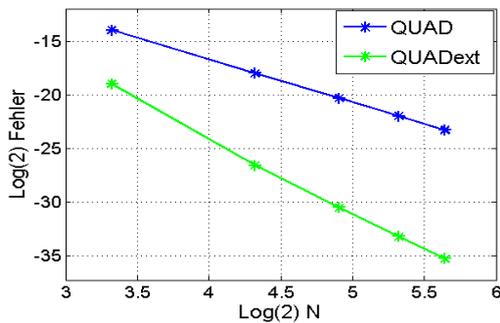


Abbildung 2: Europäische Call Option

4.2 Optionen mit Pfadeigenschaften

In diesem Unterabschnitt behandeln wir die Bewertung von diskreten pfadabhängigen Optionen, bei denen die Pfadeigenschaft nur an endlich vielen Zeitpunkten auftritt (fortan als *Beobachtungszeitpunkte* bezeichnet). Innerhalb dieser Punkte wird die Bewertung der Option durch die Black-Scholes-Differentialgleichung (17) beschrieben.

Im Folgenden betrachten wir eine pfadabhängige Option mit M Beobachtungszeitpunkten T_1, \dots, T_M während ihrer Laufzeit. Aufgrund der Pfadeigenschaft verliert Gleichung (27) in allen Zeitpunkten $t \leq T_{M-1}$ ihre Gültigkeit.

Aus diesem Grund wird die Ausgangsoption zu Bewertungszwecken in M einzelne Optionen V_1, \dots, V_M mit entsprechenden Laufzeiten $\Delta t_1, \dots, \Delta t_M$ unterteilt, wobei $\Delta t_m := T_m - T_{m-1}$ für $m = 1, \dots, M$ und $T_0 := t$. Dann ist die Laufzeit der Ausgangsoption gegeben durch

$$T_M - t = \sum_{m=1}^M \Delta t_m. \quad (32)$$

Die QUAD Methode baut auf einem Rückwärtsverfahren auf, welches im Fälligkeitstermin T_M startet und im Bewertungszeitpunkt t endet.

Mit bekannten Endbedingungen wird die erste individuelle Option $V_M(x, T_{M-1})$ (zukünftige Schreibweise anstatt $V_M(S, T_{M-1})$) für alle Underlying-Preise auf dem Gitter zwischen $y_{max_{M-1}}$ und $y_{min_{M-1}}$ bewertet. Die Bedingung zum Beobachtungszeitpunkt T_{M-1} wird daraufhin auf diesen Optionswert übertragen und die angepassten Werte erzeugen die Endbedingung der nächsten Option, $V_{M-1}(y, T_{M-1})$. Dies wird fortgeführt bis zum finalen Optionspreis $V_1(x, T_0)$, welcher nur für $x = \ln(\frac{S(t)}{K})$ berechnet werden muss.

Die Werte für N^+ und N^- ändern sich in jedem T_m , sodass wir für $m = 1, \dots, M$

$$N_m^+ = \left\lceil \frac{y_{max_m} - b_m}{h} \right\rceil \quad \text{und} \quad N_m^- = \left\lfloor \frac{y_{min_m} - b_m}{h} \right\rfloor \quad (33)$$

setzen, wobei b_m für die transformierte Unstetigkeitsstelle im Zeitpunkt T_m steht. Die Beschränkung des Integrals verläuft zunächst äquivalent zur Vanilla Call Option, d.h. $y_{max_m} = x_0 + 10\sigma\sqrt{T_m - t}$ und $y_{min_m} = x_0 - 10\sigma\sqrt{T_m - t}$. Dennoch ist es nicht notwendig, für jedes x über das ganze Intervall $[y_{min_m}, y_{max_m}]$ zu integrieren.

Aus diesem Grund wählen wir als Intervallanzahl der Simpsonsumme im Bereich $[y_{min_m}, b_m]$ den Wert $\max(i_m^-, N_m^-)$ und in $[b_m, y_{max_m}]$ entsprechend $\min(i_m^+, N_m^+)$, wobei

$$i_m^+ = \left\lceil \frac{x + 10\sigma\sqrt{\Delta t_m} - b_m}{h} \right\rceil \quad \text{und} \quad i_m^- = \left\lfloor \frac{x - 10\sigma\sqrt{\Delta t_m} - b_m}{h} \right\rfloor. \quad (34)$$

Die Implementierung erfolgt wieder über die Simpson-Summe, wobei $V_m(x, T_{m-1})$ für alle x mit

$$x = b_{m-1} + ih \quad \text{und} \quad i = N_{m-1}^-, N_{m-1}^- + \frac{1}{2}, \dots, N_{m-1}^+ - \frac{1}{2}, N_{m-1}^+,$$

kalkuliert werden muss ($m = 2, \dots, M$).

Die Unstetigkeitsstellen b_m sind für manche Optionen schon im vorhinein bekannt. Im Fall der Europäischen Option war $b = 0$, bei einer diskreten Barrier-Option gilt für die Barriere B_m zum Zeitpunkt $T_m < T_M$: $b_m = \ln(\frac{B_m}{K})$.

Für andere Klassen von Optionen muss diese Stelle für jeden Zeitpunkt neu bestimmt werden, z.B. löst bei einer Bermuda Put Option b_m die Gleichung $K - S = P_{m+1}(b_m, T_m)$. Nehmen wir diese Optionsklasse als Prototyp, so suchen wir also nach der Nullstelle der Funktion $g(x) := K(1 - e^x) - P_{m+1}(x, T_m)$. Die Gleichung $g(x) = 0$ wird dann mittels Newton-Raphson-Verfahren gelöst, welches quadratisch konvergiert.

Man beginnt mit Startwerten x_0 und Δx_0 sowie dem ersten Folgenglied

$$x_1 = x_0 + \Delta x_0.$$

Unter Verwendung der Simpsonsumme bei der Berechnung von $g(x_0)$ und $g(x_1)$ folgt man nun der Rekursionsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)(x_n - x_{n-1})}{g(x_n) - g(x_{n-1})} \text{ für } n \geq 1. \quad (35)$$

Die Iteration wird solange wiederholt, bis $|g(x_n)|$ eine vorgegebene Schranke unterschreitet. Im Falle der Nichtexistenz von b_m im Bereich $[y_{min_m}, y_{max_m}]$ wird das Verfahren abgebrochen.

Abbildung 3 skizziert das Rückwärtsverfahren der QUAD Methode bei einer diskreten Down-Out Call Option mit Barriere B_1 in T_1 .

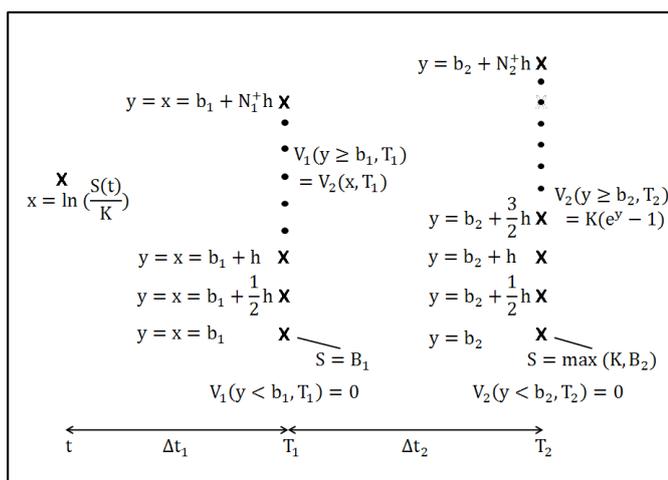


Abbildung 3: Bewertung einer diskreten Down-Out Call Option

5 Implementierung

Nun wird gezeigt, wie der QUAD Algorithmus für eine pfadabhängige Option implementiert werden kann.

Eingabe: Aktienkurs S , Basispreis K , Anzahl Beobachtungszeitpunkte M , Zinssatz r , Volatilität σ , Laufzeit T , Schrittweitenparameter N

Ausgabe: Optionswert V

$$\Delta t = T/M$$

$$k = 2r/\sigma^2 - 1$$

$$h = \sqrt{\Delta t}/N$$

for $j=1, \dots, M$

$$y_{max_j} = \ln(S/K) + 10\sigma\sqrt{j\Delta t}$$

$$y_{min_j} = \ln(S/K) - 10\sigma\sqrt{j\Delta t}$$

for $j=M, \dots, 0$

if ($j=0$)

Berechne i_1^+, i_1^- für $x = \ln(S/K)$ aus (34)

Berechne $V(0, 0, 0)$ für $x = \ln(S/K)$ mittels Simpsonsumme und $V(\cdot, \cdot, 1)$

elseif ($j=M$)

Bestimme b_M mittels Newton-Raphson-Verfahren

Berechne N_M^+, N_M^- aus (33)

for $i=N_M^-, \dots, N_M^+$

for $ii=0, 1$

Berechne $V(i, ii, M)$ für $x = b_M + (i + 0.5ii)h$

else

Bestimme b_j mittels Newton-Raphson-Verfahren

Berechne N_j^+, N_j^- aus (33)

for $i=N_j^-, \dots, N_j^+$

for $ii=0, 1$

Berechne i_{j+1}^+, i_{j+1}^- für jedes $x = b_j + (i + 0.5ii)h$ aus (34)

Berechne $V(i, ii, j)$ für $x = b_j + (i + 0.5ii)h$ mittels Simpsonsumme und $V(\cdot, \cdot, j+1)$

Übertrage die Bedingung auf $V(i, ii, j)$

$$V = V(0, 0, 0)$$

6 Anwendung auf exotische Optionen

Als Zeichen der vielseitigen Anwendung der QUAD Methode wird nun die Bewertung einer Reihe von exotischen Optionen vorgenommen.

6.1 Digitale Optionen

Die Bewertung einer Asset-Or-Nothing Call Option ähnelt stark der einer Vanilla Call Option. Die Auszahlung im Fälligkeitstermin T beträgt (C wie Call)

$$C(y > 0, T) = Ke^y.$$

Hierin geht natürlich ein, dass sich die Unstetigkeit an der Stelle $y = 0$ befindet. Der Optionswert für $x = x_0 = \ln(\frac{S(t)}{K})$ berechnet sich dann wie in (30):

$$C(x, t) \approx \frac{A(x)h}{6} K \left(B(x, 0)e^0 + 4B(x, \frac{1}{2}h)e^{\frac{1}{2}h} + \dots \right. \\ \left. + 4B(x, N^+h - \frac{1}{2}h)e^{N^+h - \frac{1}{2}h} + B(x, N^+h)e^{N^+h} \right) \quad (36)$$

Für eine Cash-Or-Nothing Option ersetze man Ke^y durch den festen Betrag B .

6.2 Barrier-Optionen

Wir widmen uns nun einer (diskreten) Down-Out Call Option. Die Idee ist jedoch leicht auf andere Barrier-Optionen übertragbar.

Sei b_m die transformierte Position der Schranke B_m , also

$$b_m = \ln \left(\frac{B_m}{K} \right).$$

Für die erste Schranke setzen wir $b_M := \max(\ln(\frac{B_M}{K}), 0)$. Mit Gleichung (27) gilt dann für den Optionswert $C_m(x, T_{m-1})$

$$C_m(x, T_{m-1}) \approx A(x) \int_{b_m}^{y_{max_m}} B(x, y) C_m(y \geq b_m, T_m) dy. \quad (37)$$

Die Berechnung des Ausdrucks erfolgt analog zu Gleichung (30), wobei wiederum y_{max_m} bei der Implementierung der Simpsonsumme wie zuvor beschrieben durch $b_m + \min(i_m^+, N_m^+)h$ ersetzt wird. Die Endbedingungen sind äquivalent zum Europäischen Call, d.h.

$$C_M(y \geq b_M, T_M) = K(e^y - 1).$$

In jedem Zeitschritt erfolgt oberhalb der Schranke die Ersetzung der x durch die y -Werte:

$$C_m(y \geq b_m, T_m) = C_{m+1}(y = x, T_m) \text{ für } m = 1, \dots, M - 1.$$

Die Werte für C_{m+1} müssen für $x = b_m, b_m + \frac{1}{2}h, \dots, b_m + N_m^+h$ berechnet werden. Diese werden dann als y -Werte des nächsten Zeitschritts benutzt. Jede Periode wird, wie in (4.2) beschrieben, rückwärts durchgearbeitet, sodass wir schließlich den gesuchten Wert $C_1(x_0, T_0 = t)$ erhalten.

6.3 Zusammengesetzte Optionen

Als Prototyp dieser Klasse untersuchen wir einen M -fachen Call on Call. Es sind nun M Ausübungspreise K_1, \dots, K_M zu beachten. Aufgrunddessen müssen wir in (18) K durch K_M ersetzen, d.h.

$$x = \ln\left(\frac{S(T_m)}{K_M}\right) \text{ und } y = \ln\left(\frac{S(T_{m+1})}{K_M}\right). \quad (38)$$

Die Auszahlung in T_M ist wie bei einem Standard-Call

$$C_M(y, T_M) = K_M(e^y - 1)^+$$

mit $b_M = 0$. Unter Verwendung von Newton-Raphson (siehe: Gleichung (35)) werden die anderen Unstetigkeitsstellen $b_m, m \leq M - 1$, ermittelt; diese erfüllen hier die Gleichung $C_{m+1}(x, T_m) = K_m$. Die Endbedingung jeder Teiloption bestimmt sich wie folgt:

$$C_m(y, T_m) = (C_{m+1}(y = x, T_m) - K_m)^+$$

bzw.

$$C_m(y \geq b_m, T_m) = C_{m+1}(y = x, T_m) - K_m \text{ und } C_m(y < b_m, T_m) = 0$$

Da die Option unterhalb von b_m wertlos ist, braucht man diesen Bereich in den Berechnungen nicht zu berücksichtigen.

Schließlich überwindet man, ähnlich zu Barrier-Optionen, den nächsten Zeitschritt durch

$$C_m(x, T_{m-1}) \approx A(x) \int_{b_m}^{y_{max_m}} B(x, y) C_m(y \geq b_m, T_m) dy. \quad (39)$$

6.4 Bermuda-Optionen

Als vierten Optionstyp betrachten wir eine Bermuda Put Option, welche sich durch vorzeitiges Ausüben zu bestimmten Zeitpunkten T_1, \dots, T_M auszeichnet.

Für $1 \leq m \leq M$ hat die Bermuda Put Option in T_m den Wert (P wie Put)

$$P_m(y, T_m) = \max(P_{m+1}(y = x, T_m), K - S),$$

wobei $P_{M+1} = \max(K - S, 0)$. Im Punkt $P_{m+1}(x, T_m) = K - S$ hat die zweite Ableitung der Option eine Unstetigkeit. Dies ist gerade die Stelle, wo der Käufer indifferent zwischen Halten und vorzeitiges Ausüben der Option ist. Aus diesem Grund teilen wir erneut die Integration in zwei Komponenten auf.

Für den ersten Bewertungszeitschritt gilt $b_M = 0$ ($S = K$). Entsprechende Werte b_m für $m \leq M - 1$ werden durch Newton-Raphson bestimmt. Der Übergang zwischen zwei Teilloptionen lässt sich dann beschreiben durch

$$P_m(y \geq b_m, T_m) = P_{m+1}(y = x, T_m) \text{ und } P_m(y \leq b_m, T_m) = K(1 - e^y).$$

Mit Gleichung (27) folgt

$$\begin{aligned} P_m(x, T_{m-1}) &\approx A(x) \int_{b_m}^{y_{max_m}} B(x, y) P_m(y \geq b_m, T_m) dy \\ &\quad + A(x) \int_{y_{min_m}}^{b_m} B(x, y) K(1 - e^y) dy \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{40}$$

Zur Bestimmung von I_1 benutzen wir wieder die Simpsonsumme, I_2 hingegen besitzt eine analytische Form, die sich von der Black-Scholes-Formel für Put Optionen ableitet. Sie lautet:

$$I_2(x) = K e^{-r\Delta t_m} N(-d_2) - K e^x N(-d_1), \tag{41}$$

wobei N die Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen beschreibt und d_1 sowie d_2 gegeben sind durch

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{x - b_m + (r + \frac{\sigma^2}{2})\Delta t_m}{\sigma \sqrt{\Delta t_m}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma \sqrt{\Delta t_m}. \end{aligned}$$

6.5 Lookback-Optionen

Die Bewertung einer allgemeinen Lookback-Option mit pfadabhängiger Auszahlung führt auf ein dreidimensionales Problem. Die drei Dimensionen bilden S , t und der maximale Kurswert des Wertpapiers bis zum Zeitpunkt t \bar{A} (bzw. \underline{A} für Minimum). Bei manchen Lookback-Optionen ist es jedoch möglich, dieses Problem auf 2 Variablen zu reduzieren, sodass die weitere Vorgehensweise erleichtert wird und wichtige Rechenzeit gespart werden kann.

Diese Reduzierung ist umsetzbar, wenn der Payoff der Option von der Form

$$\bar{A}P\left(\frac{S}{\bar{A}}\right)$$

ist (entsprechendes gilt auch für \underline{A}). Ein (diskreter) variabler Lookback Put besitzt z.B. die Auszahlung

$$V(S, \bar{A}_M, T) = \bar{A}_M - S(T) = \bar{A}_M \left(1 - \frac{S(T)}{\bar{A}_M}\right),$$

wobei $\bar{A}_m = \max(S(T_m), \bar{A}_{m-1})$ für $m = 1, \dots, M$ und $\bar{A}_0 = S(t)$ (eine fixe Lookback Option erlaubt keine Variablenreduzierung und muss deswegen in 3 Dimensionen gelöst werden). Mit der Substitution

$$\xi = \frac{S}{\bar{A}} \tag{42}$$

und der Größe $W(\xi, t)$, wobei

$$V(S, \bar{A}, t) = \bar{A}W(\xi, t), \tag{43}$$

führt dies auf ein zweidimensionales Problem, in dem W die grundlegende Gleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + r\xi\frac{\partial W}{\partial \xi} - rW = 0$$

mit Endbedingung

$$W(\xi, T) = P(\xi)$$

und Randbedingung (diskreter Fall)

$$\frac{\xi}{W} \frac{\partial W}{\partial \xi} \sim 1 \text{ für } \xi \rightarrow \infty$$

erfüllt (siehe: [10], S. 245). Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass auch $V(S, \bar{A}, t)$ (mit S anstatt ξ) die Black-Scholes-Gleichung erfüllt und die unabhängige Variable \bar{A} darin nur als Parameter vorkommt.

Fortan sei V ein (diskreter) variabler Lookback Put und

$$x = \ln(\xi_m) \text{ sowie } y = \ln(\xi_{m+1}^-), \quad (44)$$

wobei $\xi_m := \frac{S(T_m)}{\bar{A}_m}$ für $m = 1, \dots, M-1$ und $\xi_{m+1}^- := \frac{S(T_{m+1}^-)}{\bar{A}_{m+1}^-} := \lim_{t \rightarrow T_{m+1}^-} \frac{S(t)}{\bar{A}_t}$ für $m = 0, \dots, M-2$ sowie $\xi_M^- := \frac{S(T_M)}{\bar{A}_M}$. Aus der Stetigkeit von S und der fehlenden Linksstetigkeit von \bar{A} in T_{m+1} folgt schließlich $\xi_{m+1}^- = \frac{S(T_{m+1})}{\bar{A}_m}$.

Die Endbedingung der Option lautet

$$W(\xi \leq 1, T_M) = 1 - \xi_M^- \text{ bzw. } W_M(y \leq 0, T_M) = 1 - e^y.$$

Aus der Stetigkeit von V in den Beobachtungszeitpunkten lässt sich die Sprungbedingung ableiten:

$$V(S(T_m), \bar{A}_{m-1}, T_m^-) = V(S(T_m), \bar{A}_m, T_m^+)$$

Für den Fall $S(T_m) \leq \bar{A}_{m-1}$ ($\xi_m^- \leq 1$) erhalten wir zunächst

$$V(S(T_m), \bar{A}_{m-1}, T_m^-) = V(S(T_m), \bar{A}_{m-1}, T_m^+)$$

und mit der Definition von W (Gleichung (43))

$$W(\xi \leq 1, T_m^-) = W(\xi, T_m^+) \text{ bzw. } W_m(y \leq 0, T_m) = W_{m+1}(y = x, T_m).$$

Die Möglichkeit, dass der Aktienkurs das bisherige Maximum bis zum nächsten Zeitpunkt übersteigt ($\xi_m^- > 1$), wird durch folgende Gleichungen berücksichtigt:

$$V(S(T_m), \bar{A}_{m-1}, T_m^-) = V(S(T_m), S(T_m), T_m^+)$$

und äquivalent dazu

$$W(\xi > 1, T_m^-) = \xi_m^- W(1, T_m^+) \text{ bzw. } W_m(y > 0, T_m) = e^y W_{m+1}(0, T_m)$$

Die Werte für $W_{m+1}(x, T_m)$ müssen nur für $x = N_m^- h, (N_m^- + \frac{1}{2})h, \dots, 0$ kalkuliert werden, da ξ_m 1 nicht überschreiten kann. Die Größen N_m^+, N_m^- bzw. i_m^+, i_m^- errechnen sich wie in den Beispielen zuvor, wobei $b_m = 0$ und der transformierte Startwert gegeben ist durch $x_0 = \ln(\frac{S(t)}{\bar{A}_0}) = 0$. Ist $W_1(x_0, T_0)$ gefunden, so ist der Preis der Lookback-Option $\bar{A}_0 W$.

6.6 Numerische Ergebnisse

Die anschließenden Tabellen und Abbildungen unterstreichen die schnelle Konvergenz des QUAD Verfahrens. Als Kennzahlen dienen der absolute Fehler zum exakten, analytischen Wert (sofern dieser existiert) und die Rechenzeit in Sekunden.

Bei Nichtexistenz der analytischen Preisformel (Barrier- und Lookback-Option) wurden die kalkulierten Optionswerte mit dem QUAD Wert für $N = 100$ verglichen. Die Verifizierung der Ergebnisse erfolgte hier durch Einbeziehung der Monte-Carlo-Methode (MC), die unter Berücksichtigung von 10 Mio. Simulationspfaden vergleichbare Resultate lieferte. Während bei Bermuda Option die Lösungsformel nach Geske/Johnson mit zwei Ausübungszeitpunkten herangezogen wurde, basieren die Werte bei Digitaler- und Zusammengesetzter Option auf dem Vergleich mit der geschlossenen Lösungsformel im Black-Scholes-Modell.

Die Extrapolation nach Richardson QUADext wurde mit den Werten für N und $N - 2$ durchgeführt, außer im Fall des Asset-Or-Nothing Calls mit N und $N - 5$ und des Lookback Puts, bei dem N und $N - 1$ verwendet wurden.

Wie zu erwarten war, besitzen Digitale- und Europäische Option die gleichen Charakteristika. Die Größe N geht nur linear in den Rechenaufwand ein, sodass wir weiterhin Konvergenzraten von 4 (QUAD) bzw. 7 (QUADext) erreichen.

Alle weiteren Optionen, die zuvor behandelt wurden, verlieren diese Eigenschaft. Der Grund liegt in der Erhöhung der Zeitschritte, die zur Bewertung einer exotischen Option mit Pfad-eigenschaften notwendig ist.

In jedem Beobachtungszeitpunkt T_m wird allen Gitterpunkten aus dem Bereich $[y_{min_m}, y_{max_m}]$ der entsprechende Optionswert mittels Simpsonsumme zugeordnet. Da die Anzahl der Gitterpunkte ebenfalls proportional mit N wächst, ist der Aufwand der QUAD Methode von der Ordnung 2. Diesen Sachverhalt kann man sich anhand der Rechenzeit oder der jeweils rechten Graphik mit Geradensteigungen von nur noch -2 bzw. -3.5 bewusst machen.

Abschließend seien die Ergebnisse für exotische Optionen (außer Digitale Option) nochmals zusammengefasst:

- Aufwand: $A = O(N^2)$
- Genauigkeit: $\varepsilon = O(N^{-4})$ (QUAD), $\varepsilon = O(N^{-7})$ (QUADext)
- Gesamtkomplexität: $\varepsilon(A) = O(A^{-2})$ (QUAD), $\varepsilon(A) = O(A^{-7/2})$ (QUADext)

ABSOLUTER FEHLER		
N	QUAD (Zeit/Sek.)	QUADext (Zeit/Sek.)
Asset-Or-Nothing Call Option ^{a)}		
10	0.0001459391 (0.00)	0.0000079566 (0.00)
20	0.0000090134 (0.00)	0.0000000405 (0.01)
30	0.0000017765 (0.01)	0.0000000026 (0.01)
40	0.0000005617 (0.01)	0.0000000004 (0.02)
50	0.0000002300 (0.01)	0.0000000001 (0.02)
Diskrete Down-Out Call Option ^{b)}		
6	0.0004171683 (1.32)	0.0001759341 (1.95)
8	0.0001201550 (2.29)	0.0000170515 (3.61)
10	0.0000470089 (3.57)	0.0000034693 (5.86)
12	0.0000220121 (5.06)	0.0000010028 (8.64)
14	0.0000115912 (6.84)	0.0000003627 (11.90)
<p>Tabelle 2: Parameter sind wie folgt: $S_0 = 80, K = 80, \sigma = 0.3, r = 0.04$ sowie $\Delta t = 2$. QUAD und QUADext wurden mit Simpsonsumme berechnet. N ist so gewählt, dass $h = \sqrt{\Delta t}/N$.</p> <p>b) $S_0 = 100, K = 105, B_1 = 90, \dots, B_5 = 94,$ $\sigma = 0.2, r = 0.06$ sowie $T - t = 1$. QUAD und QUADext wurden mit Simpsonsumme berechnet. N ist so gewählt, dass $h = \sqrt{\Delta t_m}/N$, wobei $\Delta t_m = \frac{T-t}{5} = 0.2$. Optionspreise: QUADext: 8.0694 ($N = 8$), MC: 8.0687</p>		

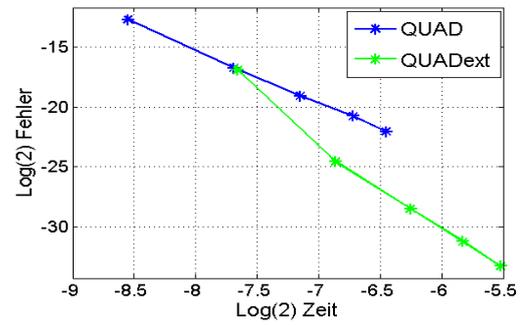
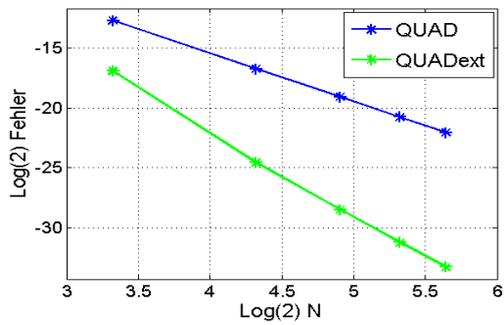


Abbildung 4: Asset-Or-Nothing Call Option

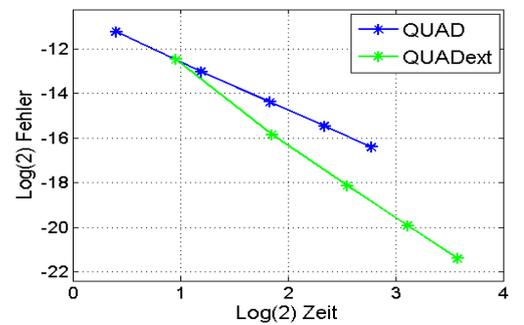
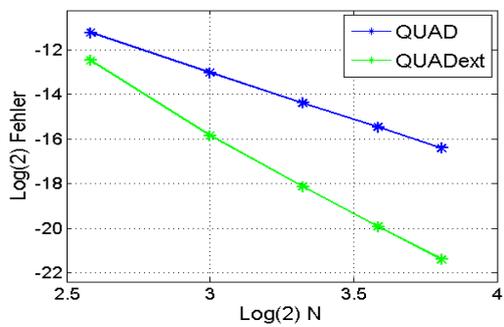


Abbildung 5: Diskrete Down-Out Call Option

ABSOLUTER FEHLER		
N	QUAD (Zeit/Sek.)	QUADext (Zeit/Sek.)
Call on Call Option ^{a)}		
6	0.0006687684 (0.51)	0.0000636411 (0.76)
10	0.0000837628 (1.27)	0.0000015101 (2.12)
14	0.0000216073 (2.39)	0.0000001597 (4.18)
18	0.0000078781 (3.85)	0.0000000315 (6.91)
22	0.0000035238 (5.60)	0.0000000088 (10.26)
Bermuda Put Option ^{b)}		
6	0.0000581276 (0.82)	0.0000049288 (1.22)
8	0.0000179987 (1.42)	0.0000005753 (2.25)
10	0.0000073005 (2.18)	0.0000001216 (3.61)
12	0.0000035022 (3.01)	0.0000000357 (5.19)
14	0.0000018845 (4.08)	0.0000000129 (7.08)
<p>Tabelle 3: Parameter sind wie folgt: a) $S_0 = 95$, $K_1 = 20$, $K_2 = 80$, $\sigma = 0.3$, $r = 0.04$ sowie $T - t = 1$. QUAD und QUADext wurden mit Simpsonsumme berechnet. N ist so gewählt, dass $h = \sqrt{\Delta t_m}/N$, wobei $\Delta t_m = \frac{T-t}{2} = 0.5$.</p> <p>b) $S_0 = 100$, $K = 95$, $M = 2$, $\sigma = 0.4$, $r = 0.05$ sowie $T - t = 2$. QUAD und QUADext wurden mit Simpsonsumme berechnet. N ist so gewählt, dass $h = \sqrt{\Delta t_m}/N$, wobei $\Delta t_m = \frac{T-t}{2} = 1$.</p>		

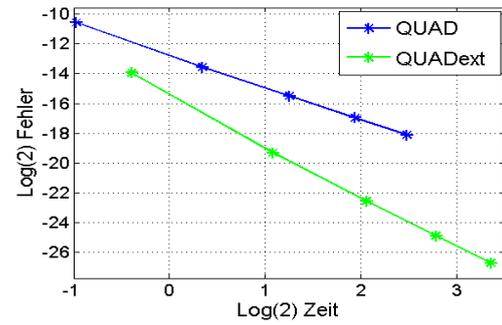
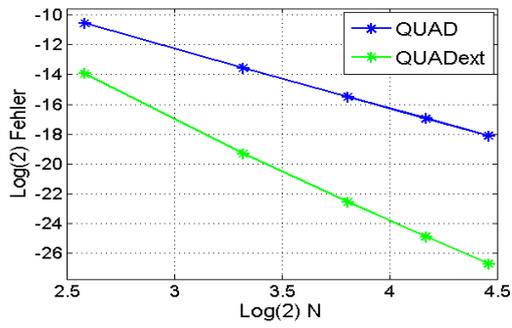


Abbildung 6: Call on Call Option

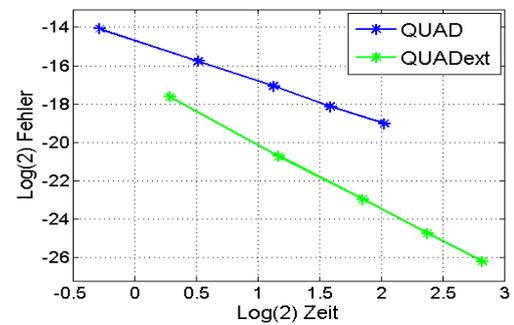
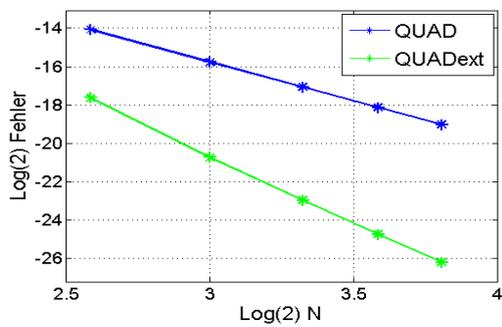


Abbildung 7: Bermuda Put Option

ABSOLUTER FEHLER		
N	QUAD (Zeit/Sek.)	QUADext (Zeit/Sek.)
Variable Lookback Put Option		
6	0.0003792970 (2.40)	0.0000126369 (4.09)
7	0.0002026778 (3.24)	0.0000044702 (5.64)
8	0.0001180387 (4.21)	0.0000018542 (7.45)
9	0.0000733662 (5.27)	0.0000008645 (9.48)
10	0.0000479838 (6.40)	0.0000004413 (11.68)

Tabelle 4: Parameter sind wie folgt: $S_0 = 50$, $\bar{A}_0 = 50$, $M = 4$, $\sigma = 0.3$, $r = 0.05$ sowie $T - t = 1$. QUAD und QUADext wurden mit Simpsonsumme berechnet. N ist so gewählt, dass $h = \sqrt{\Delta t_m}/N$, wobei $\Delta t_m = \frac{T-t}{4} = 0.25$. Optionspreise:
QUADext: 7.3106 ($N = 6$), MC: 7.3108

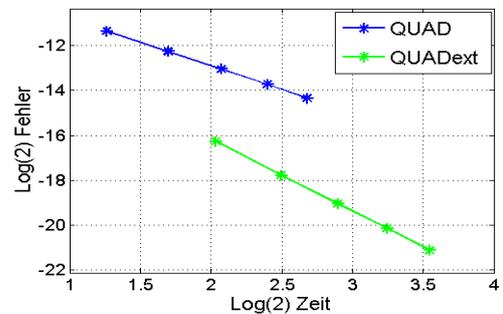
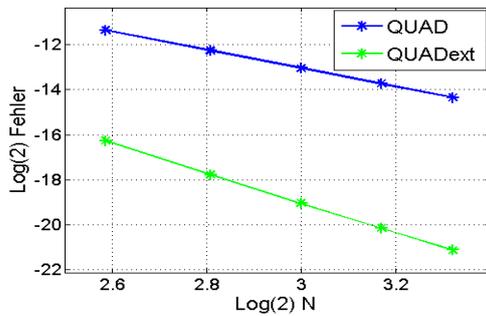


Abbildung 8: Variable Lookback Put Option

7 Schlussbemerkungen und Fazit

Diese Arbeit hat gezeigt, warum eine auf Quadraturverfahren basierend numerische Methode ein schnelles und exaktes Verfahren für die Bewertung von exotischen Optionen ist. Trotz der Ähnlichkeit zu Multinomialbäumen besitzt die QUAD Methode deutliche Vorteile. Mithilfe von Simpsonsumme und Richardson-Extrapolation können Konvergenzraten von bis zu 3.5 erreicht werden, während die Trinomialmethode nur mit Ordnung $1/2$ konvergiert. Die Resultate in Unterabschnitt 6.6 zeigen dies deutlich. Bei Optionen ohne Pfadigenschaften steigt diese Rate sogar auf 7, d.h. bei Verdopplung des Rechenaufwands stellt sich ein 128-fach kleinerer Fehler ein.

Zurückzuführen ist dies unter anderem auf die Vermeidung eines mehrdimensionalen Integrals und der hohen Konvergenzraten von Quadraturformeln. Des Weiteren profitiert die Methode von der einfachen und exakten Platzierung der Knoten an den Unstetigkeitsstellen, sodass keine Glattheitsbedingungen an die Auszahlungsfunktion gestellt werden müssen.

Die Übernahme der Black-Scholes-Differentialgleichung zwischen den Beobachtungen führt außerdem dazu, dass das Verfahren den Verteilungsfehler fast vollständig eliminiert.

Besonders bei diskreten pfadabhängigen Optionen zeigt sich die Stärke der Methode: Nur an den Beobachtungszeitpunkten ist eine Bewertung notwendig, die dazwischenliegende Zeitperiode wird mit nur einem Berechnungsschritt überbrückt.

Hier zeigt sich jedoch auch der einzige Nachteil von QUAD: Für kontinuierliche pfadabhängige Optionen müsste die Anzahl der Beobachtungszeitpunkte M ins Unendliche steigen, sodass für die Bewertung unendlich viele Zeitschritte durchgearbeitet werden müssten. Folglich würde der Rechenaufwand explodieren.

Dennoch überwiegen bei allgemeiner Betrachtung die vielen positiven Eigenschaften, sodass QUAD als zumindest gleichrangiges Verfahren gegenüber den traditionellen Methoden betrachtet werden muss und als Erweiterung Einfluss in die Optionsbewertung finden sollte.

Literatur

- [1] ANDRICOPOULOS, A.: *Option pricing using quadrature and other numerical methods*, Dissertation, University of Manchester, 2002.
- [2] ANDRICOPOULOS, A.; WIDDICKS, M.; DUCK, P.; NEWTON, D.: *Universal option valuation using quadrature methods*, University of Manchester.
- [3] BRASS, HELMUT: *Quadraturverfahren*, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1977.
- [4] GERSTNER, THOMAS: *Finanznumerik (Computational Finance)*, Vorlesungsskript, Frankfurt, 2010.
- [5] GERSTNER, THOMAS: *Numerische Mathematik*, Vorlesungsskript, Frankfurt, 2010.
- [6] HULL, JOHN C.: *Options, futures, and other derivatives*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 7th edition, 2010.
- [7] LUBE, GERT: *Numerische Mathematik I*, Vorlesungsskript, Göttingen.
- [8] SEYDEL, RÜDIGER: *Tools for Computational Finance*, Springer, Berlin, 3rd edition, 2006.
- [9] WILMOTT, PAUL: *Paul Wilmott on quantitative finance*, Wiley, 2nd edition, 2006.
- [10] WILMOTT, P.; HOWISON, S.; DEWYNNE, J.: *The mathematics of financial derivatives*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [11] WÜRFEL, ANJA: *Analytische und numerische Lösung der Black-Scholes-Gleichung für europäische und amerikanische Basket-Optionen*, Diplomarbeit, Berlin, 2007.