

# Ein Produktbinomialverfahren zur Bewertung von Multiasset-Optionen

## Bachelorarbeit

von

Annkathrin Brauer

Geb. am: 18.06.1989

Matrikelnummer: 3808445

Studienrichtung: Mathematik

eingereicht bei

Prof. Dr. Thomas Gerstner

Fachbereich Informatik und Mathematik

Institut für Mathematik

Goethe Universität

Frankfurt am Main

am 19. September 2011

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Optionen</b>	<b>5</b>
2.1	Standard-Optionen . . . . .	5
2.1.1	Black-Scholes-Modell . . . . .	5
2.1.2	Europäische Optionen . . . . .	7
2.1.3	Amerikanische Optionen . . . . .	8
2.2	Multiasset-Optionen . . . . .	8
2.2.1	Mehrdimensionales Black-Scholes-Modell . . . . .	9
2.2.2	Basket-Optionen . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Binomialverfahren</b>	<b>14</b>
3.1	Konstruktion . . . . .	14
3.2	Cox-Ross-Rubinstein-Modell . . . . .	15
3.3	Verfahren . . . . .	18
3.3.1	Vorwärtsphase . . . . .	18
3.3.2	Rückwärtsphase . . . . .	19
3.4	Eigenschaften . . . . .	20
3.5	Implementierung in MATLAB . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Produktbinomialmodell</b>	<b>26</b>
4.1	Konstruktion . . . . .	26
4.2	Verfahren . . . . .	30
4.2.1	Vorwärtsphase . . . . .	30
4.2.2	Rückwärtsphase . . . . .	32
4.3	Eigenschaften . . . . .	33
4.4	Implementierung in MATLAB . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Numerische Ergebnisse</b>	<b>41</b>
5.1	Vergleich von Optionen auf verschiedenen Baskets . . . . .	41
5.2	Konvergenzverhalten für europäische Optionen . . . . .	42
5.3	Konvergenzverhalten für amerikanische Optionen . . . . .	45
<b>6</b>	<b>Schlusswort</b>	<b>47</b>

# 1 Einleitung

Finanzderivate sind Produkte, die eine Möglichkeit bieten sich gegen künftige Preisschwankungen abzusichern oder auf eine zukünftige Preisentwicklung zu spekulieren. Die wichtigsten Arten von Finanzderivaten sind Optionen, Futures, Forwards und Swaps. Gegenstand vorliegender Bachelorarbeit werden ausschließlich Optionen sein.

Auf den internationalen Finanzmärkten werden verschiedene Typen von Optionen gehandelt, weshalb sich die Frage des „fairen Preises“ eines solchen Produktes stellt. Für viele gehandelte Optionen gibt es keine geschlossene Lösung zur Bestimmung des Preises, deshalb werden für diese numerische Verfahren zur Berechnung angewandt. Dabei muss beachtet werden, dass der Optionswert möglichst genau ist, jedoch sollte der Aufwand dabei ziemlich gering sein.

Ziel dieser Arbeit ist die Bestimmung eines numerischen Verfahrens, mit dem man europäische und amerikanische Multiasset-Optionen bewerten kann. Dieses Verfahren soll eine Erweiterung des bekannten Binomialverfahrens sein. Im Fokus steht dabei das Binomialverfahren, da es durch die Einschränkung auf zwei Entwicklungsmöglichkeiten in der Anwendung einfacher ist als das Black-Scholes-Modell. Dieses Verfahren ist nur für europäische und amerikanische Standard-Optionen definiert. Bei der Erweiterung muss beachtet werden, dass Multiasset-Optionen von mehreren Wertpapieren abhängen. In der Arbeit wird ein Produktbinomialverfahren entwickelt, das die Anzahl der Wertpapiere in der Dimension der entstehenden Bäume berücksichtigt. Dieses Verfahren konvergiert gegen das mehrdimensionale Black-Scholes-Modell und ist zu dessen graphischer Darstellung geeignet. Es wird jedoch auch gezeigt, dass dieses dem Fluch der Dimension unterliegt und somit der Aufwand für einen möglichst genauen Optionswert ziemlich hoch ist. Die Erweiterung dieses Verfahrens durch Dünne Gitter erzielt eine Optimierung der Laufzeit. Da der Fokus dieser Bachelorarbeit jedoch auf dem Produktbinomialverfahren liegt, wird im Folgenden auf diese Erweiterung nicht eingegangen.

Vorliegende Arbeit ist wie folgt aufgebaut:

Zu Beginn werden in Kapitel 2 die wichtigsten Grundlagen zur Optionsbewertung gegeben. Der Abschnitt 2.1 beschäftigt sich nur mit Optionen, die auf einem Wertpapier basieren. Es wird zunächst das Black-Scholes-Modell behandelt und die daraus resultierende Gleichung zur Berechnung der zukünftigen Aktienkurse. Danach werden die europäischen Optionen mit deren Payoff und amerikanische Optionen eingeführt. In Abschnitt 2.2 wird auf die gleiche Weise vorgegangen, jedoch handelt es sich hier um Optionen, die auf mehreren Wertpapieren basieren. Am Anfang wird das mehrdimensionale Black-Scholes-Modell vorgestellt mit dessen Gleichung zur Berechnung der Aktienkurse. Im Anschluss

daran werden verschiedene Definitionen für den Wert eines Baskets zusammengestellt und der Payoff einer Basket-Option definiert. Der Begriff Basket steht für die Zusammensetzung mehrerer Aktien.

Das Kapitel 3 beschäftigt sich mit dem Binomialverfahren. Hierbei werden anfangs Modellannahmen getroffen und danach auf die Besonderheit des Cox-Ross-Rubinstein-Modells bei der Berechnung der Parameter eingegangen. Es folgt die Betrachtung des Ablaufes vom Binomialmodell, welches in zwei Phasen aufgeteilt wird. In der Vorwärtsphase werden die zukünftigen Aktienkurse und in der Rückwärtsphase die Optionspreise berechnet. Anschließend werden Eigenschaften des Binomialverfahrens bezüglich des Aufwandes und der Konvergenz zusammengestellt. Am Ende des Kapitels wird dessen Implementierung in MATLAB für europäische und amerikanische Optionen angegeben.

Kapitel 4 behandelt das eigentliche Thema dieser Arbeit. In diesem Abschnitt wird das Produktbinomialverfahren vorgestellt. Dieses Kapitel ist genauso strukturiert, wie Kapitel 2. Zunächst werden Modellannahmen getroffen und die Verfahrensparameter bestimmt. In diesem Verfahren werden mehreren Aktien berücksichtigt und durch mehrdimensionale Binomialbäume, die mit Hilfe des Tensorproduktes von eindimensionalen Bäumen entstehen, dargestellt. Jedoch wird auch hierbei der Ablauf des Produktbinomialverfahrens in zwei Phasen aufgeteilt. In der Vorwärtsphase wird zunächst der Wiener-Prozess bestimmt, mit dem man die künftigen Wertpapierkurse berechnet. In der Rückwärtsphase werden dann die Optionspreise ermittelt. Außerdem werden der Aufwand und die Konvergenzeigenschaften zusammengestellt. Abschließend wird für das Produktbinomialverfahren eine Implementierung in MATLAB für europäische und amerikanische Optionen angegeben.

In Kapitel 5 werden die numerischen Ergebnisse zusammengefasst. Dabei wird zunächst das Verhalten der Optionen auf verschiedenen Basket betrachtet und daraufhin das Konvergenzverhalten des Verfahrens untersucht. Für europäische Optionen mit geometrischem Basket und für eine Call-Option mit dem Maximum als Basket wird deren geschlossene Lösung betrachtet. Für arithmetische Baskets wird das Monte-Carlo Verfahren zu Hilfe genommen. Die Konvergenzgeschwindigkeit der amerikanischen Optionen wird mit einer Tabelle, die die Optionspreise und deren Differenzen angibt, dargestellt.

Das Schlusswort in Kapitel 6 fasst die Ergebnisse abschließend zusammen und rundet diese Arbeit ab.

## 2 Optionen

In diesem Abschnitt werden zunächst Standard-Optionen und anschließend verschiedene Formen von Basket-Optionen betrachtet.

### 2.1 Standard-Optionen

Standard-Optionen werden auch Plain Vanilla Optionen genannt. Der Begriff umfasst Optionen europäischer und amerikanischer Art.

Ein Anleger erwirbt zunächst zum Zeitpunkt  $t = 0$  einen Optionsschein auf ein Wertpapier, um mit diesem eine vorher bestimmte Menge des zugrundeliegenden Wertpapiers zum Ende der vorher festgelegten Laufzeit zu beziehen oder zu liefern. Der aktuelle Wert der Option  $V$  ist von dem momentanen Zeitpunkt  $0 \leq t \leq T$  und von dem Kurs des Basiswertes  $S(t)$  abhängig.

Dieser Abschnitt beginnt mit dem Black-Scholes-Modell zur Bestimmung der zukünftigen Aktienkurse und geht dann über zu den Definitionen der Plain Vanilla Optionen.

#### 2.1.1 Black-Scholes-Modell

Das Black-Scholes-Modell ist das bekannteste und meist verwendete Modell zur Bewertung von Optionen ohne Dividendenausschüttung. Dem Modell liegen folgende vereinfachende Modellannahmen an den Finanzmarkt zugrunde:

- Es existiert ein vollkommener, vollständiger Kapitalmarkt mit Arbitragefreiheit, ohne Transaktionskosten, ohne Steuern und unbeschränkten Leerverkäufen.  
     $\implies$  Mittels eines eindimensionalen Martingalmaßes kann zu jedem Zeitpunkt der Preis jeder Aktie eindeutig bestimmt werden.
- Der risikolose Zinssatz  $r \geq 0$  ist konstant und man kann sich zu diesem in jedem beliebigen Zeitpunkt verschulden oder investieren.
- Alle Wertpapiere können kontinuierlich gehandelt werden und sind beliebig teilbar.
- Kein Marktteilnehmer verfügt über Informationsvorsprünge.
- Sei der Aktienkurs  $S(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  ein Itô-Prozess und durch folgende lineare Differentialgleichung definiert:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

mit  $W(t) \sim N(0, t)$  einem Wiener-Prozess, gegebener Volatilität  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  und gegebenem Drift  $\mu \in \mathbb{R}$ .

(Man kann unter dem risikoneutralen Martingalmaß den Drift  $\mu$  durch den risikolosen Zinssatz  $r$  ersetzen, da dabei alle Anleger frei von Risikopräferenzen sind)

**Satz 2.1.1** *Der Aktienkurs  $S(t)$  ist gegeben durch*

$$S(t) = S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma W(t)} .$$

Beweis: (vgl. [Ger10], Satz 3.4.3)

Sei  $V(S, t) = \ln(S(t)/S(0))$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} d(\ln(S(t)/S(0))) &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + f(S, t) \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} (g(S, t))^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + g(S, t) \frac{\partial V}{\partial S} dW(t) \\ &= \left( 0 + rS(t) \frac{1}{S(t)} + \frac{1}{2} \sigma^2 S(t)^2 \left( -\frac{1}{S(t)^2} \right) \right) dt + \sigma S(t) \frac{1}{S(t)} dW(t) \\ &= \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW(t) \\ \ln(S(t)/S(0)) &= \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \\ S(t) &= S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma W(t)} . \end{aligned}$$

□

**Lemma 2.1.2** *Sei  $S(t)$  wie in Satz 2.1.1 definiert. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} E[S(t)] &= S(0)e^{rt} \\ \text{Var}[S(t)] &= S^2(0)e^{2rt}(e^{\sigma^2 t} - 1) . \end{aligned}$$

Beweis: (vgl. [GJ10], Lemma 3.12)

Da  $W(t)$  ein Wiener-Prozess und  $N(0, t)$ -verteilt ist, erhält man

$$E[e^{\sigma W(t)}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma x} e^{-x^2/2t} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\sigma^2 t/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\sigma t)^2/2t} dx = e^{\sigma^2 t/2} .$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 E[S(t)] &= S(0)e^{rt-\sigma^2t/2}E[e^{\sigma W(t)}] = S(0)e^{rt} \\
 \text{Var}[S(t)] &= E[S^2(t)] - (E[S(t)])^2 = S^2(0)e^{(2r-\sigma^2)t}E[e^{2\sigma W(t)}] - S^2(0)e^{2rt} \\
 &= S^2(0)e^{2rt}(e^{\sigma^2t} - 1) .
 \end{aligned}$$

□

## 2.1.2 Europäische Optionen

**Definition 2.1.3 (Call-Option)** Ein Anleger erwirbt mit dem Kauf einer Call-Option das Recht (aber nicht die Pflicht) eine bestimmte Menge eines Wertpapiers, zu einem im Voraus vereinbarten Preis  $K$  zum Zeitpunkt  $T$  zu kaufen. Der Optionswert zum Zeitpunkt  $T$  ist (vgl. [Ger10])

$$V(S, T) = \max\{S(T) - K, 0\} = (S(T) - K)^+ .$$

**Definition 2.1.4 (Put-Option)** Ein Anleger erwirbt mit dem Kauf einer Put-Option das Recht (aber nicht die Pflicht) eine bestimmte Menge eines Wertpapiers, zu einem im Voraus vereinbarten Preis  $K$  zum Zeitpunkt  $T$  zu verkaufen. Der Optionswert zum Zeitpunkt  $T$  ist (vgl. [Ger10])

$$V(S, T) = \max\{K - S(T), 0\} = (K - S(T))^+ .$$

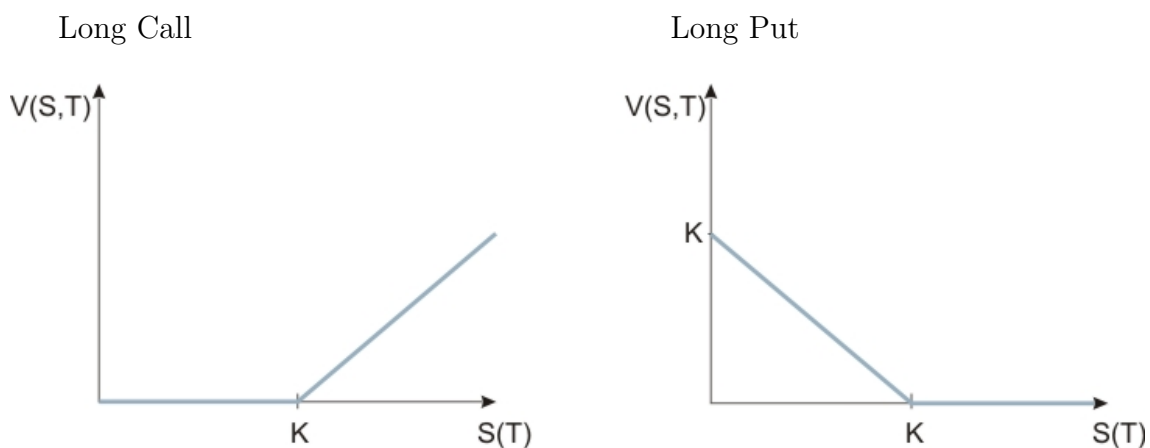


Abbildung 2.1.1: Auszahlungsfunktionen der beiden Optionen

### 2.1.3 Amerikanische Optionen

**Definition 2.1.5 (Amerikanische Option)** *Der Anleger hat hier das Recht die Option nicht zu einem bestimmten Zeitpunkt, sondern während des ganzen Ausübungszeitraums  $[0, T]$ , einmalig auszuführen.*

**Satz 2.1.6** *Für eine europäische und amerikanische Option unter den gleichen Voraussetzungen gilt*

$$V^{eur}(S, t) = V^{am}(S, t)$$

mit  $S > 0$  und  $0 \leq t \leq T$ .

Beweis: (vgl. [Ger10], Satz 2.3.6)

Die Möglichkeit, eine amerikanische Option zu jedem Zeitpunkt des vereinbarten Zeitraums  $[0, T]$  auszuüben, impliziert

$$V^{am}(S, t) \geq V^{eur}(S, t),$$

da der Anleger bei dieser mehr Rechte als bei einer europäischen Option hat.

Für eine europäische Call-Option bildet die Auszahlungsfunktion mit diskontiertem Ausübungspreis die untere Schranke

$$V^{eur}(S, t) \geq (S(t) - Ke^{-r(T-t)})^+.$$

$$\implies V^{am}(S, t) \geq V^{eur}(S, t) \geq (S(t) - Ke^{-r(T-t)})^+ \geq (S(t) - K)^+$$

Somit lohnt sich ein frühzeitiges Ausüben der Option nicht.

□

## 2.2 Multiasset-Optionen

Bis zu diesem Kapitel wurde nur auf Optionen, die auf einem Wertpapier basieren, eingegangen. In der Realität werden auf den internationalen Finanzmärkten jedoch auch viele Optionen, die von  $d \geq 2$  verschiedenen Wertpapieren abhängen, gehandelt. Beruht die Auszahlung einer Option auf mehreren Wertpapieren, spricht man von Multiasset-Optionen oder Basket-Optionen.



### 2.2.1 Mehrdimensionales Black-Scholes-Modell

Unter den gleichen Modellannahmen an den Finanzmarkt wie in Abschnitt 2.1.2 wird auch das mehrdimensionale Black-Scholes-Modell definiert. Jedoch folgt hier jeder Aktienkurs  $S_i(t)$  einer Basket-Option der linearen stochastischen Differentialgleichung (vgl. [Gla03], Seite 104):

$$dS_i(t) := rS_i(t)dt + \sum_{j=1}^d A_{ij}S_i(t)dW_j(t) \quad \text{für } i = 1, \dots, d \quad (1)$$

mit  $W_j(t) \sim N(0, t)$  einem Wiener-Prozess. Die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  ergibt sich aus der Gleichung  $A \cdot A^\top = \Sigma$  und kann mittels der Cholesky-Zerlegung von  $\Sigma$  berechnet werden. Die Matrix  $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$  ist die Kovarianzmatrix. Jeder Eintrag dieser ist durch  $\Sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$  definiert, dabei ist  $\sigma_i$  die Volatilität der Aktie  $i$  und  $\rho_{ij}$  die Korrelation von Aktie  $i$  zu Aktie  $j$ .

**Satz 2.2.1** *Jeder Aktienkurs  $S_i(t)$  der Basket-Option ist gegeben durch*

$$S_i(t) = S_i(0) \exp \left( \left( r - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d A_{ij}^2 \right) t + \sum_{j=1}^d A_{ij} W_j(t) \right)$$

für  $i = 1, \dots, d$ .

Beweis: Die Gleichung (1) gibt die lineare stochastische Differentialgleichung des Aktienkurses  $S_i(t)$  an.

$$\begin{aligned} dS_i(t) &= rS_i(t)dt + \sum_{j=1}^d A_{ij}S_i(t)dW_j(t) \\ &= \underbrace{rS_i(t)dt}_{f(S_i,t)} + \underbrace{A_{i1}S_i(t)dW_1(t)}_{g_1(S_i,t)} + \dots + \underbrace{A_{id}S_i(t)dW_d(t)}_{g_d(S_i,t)} \end{aligned}$$

Im Folgenden wird die Itô Formel für  $d$ -dimensionale stochastische Differentialgleichungen angewandt (siehe [Kloe10], Seite 76).

Sei  $V(S_i, t) = \ln(S_i(t)/S_i(0))$ , dann gilt:

$$\begin{aligned}
d(\ln(S_i(t)/S_i(0))) &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + f(S_i, t) \frac{\partial V}{\partial S_i} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}(g_1(S_i, t))^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_i^2} + \dots + \frac{1}{2}(g_d(S_i, t))^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_i^2} \right) dt \\
&\quad + g_1(S_i, t) \frac{\partial V}{\partial S_i} dW_1(t) + \dots + g_d(S_i, t) \frac{\partial V}{\partial S_i} dW_d(t) \\
&= \left( 0 + rS_i(t) \frac{1}{S_i(t)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}A_{i1}^2 S_i(t)^2 \left( -\frac{1}{S_i(t)^2} \right) + \dots + \frac{1}{2}A_{id}^2 S_i(t)^2 \left( -\frac{1}{S_i(t)^2} \right) \right) dt \\
&\quad + A_{i1} S_i(t) \frac{1}{S_i(t)} dW_1(t) + \dots + A_{id} S_i(t) \frac{1}{S_i(t)} dW_d(t) \\
&= \left( r - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d A_{ij}^2 \right) dt + \sum_{j=1}^d A_{ij} dW_j(t) \\
\ln(S_i(t)/S_i(0)) &= \left( r - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d A_{ij}^2 \right) t + \sum_{j=1}^d A_{ij} W_j(t) \\
S_i(t) &= S_i(0) \exp \left( \left( r - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d A_{ij}^2 \right) t + \sum_{j=1}^d A_{ij} W_j(t) \right).
\end{aligned}$$

□

### 2.2.2 Basket-Optionen

**Definition 2.2.2 (Wert eines Baskets)** *Es gibt verschiedene Möglichkeiten den Wert des Baskets  $B(t)$ , der von den Wertpapieren  $S_1, \dots, S_d$  abhängt, zum Zeitpunkt  $t \leq T$  zu definieren. Im Folgenden werden vier Beispiele angegeben (vgl. [Kür08]):*

$$\begin{aligned}
B(t) &:= \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d S_i(t) && \text{(arithmetisches Mittel)} \\
B(t) &:= \left( \prod_{i=1}^d S_i(t) \right)^{\frac{1}{d}} && \text{(geometrisches Mittel)} \\
B(t) &:= \max_{i=1, \dots, d} \{S_i(t)\} && \text{(Maximum)} \\
B(t) &:= \min_{i=1, \dots, d} \{S_i(t)\} && \text{(Minimum)}
\end{aligned}$$

mit  $S_i(t)$  als Aktienkurs des Wertpapiers  $i = 1, \dots, d$  zum Zeitpunkt  $t \leq T$ .

**Definition 2.2.3 (Payoff einer Basket-Option)** Der Payoff einer Standard-Basket-Option mit vorher vereinbartem Preis  $K$  zum Zeitpunkt  $T$  ist

$$V(S, T) = \begin{cases} (B(T) - K)^+ & \text{für Call-Option,} \\ (K - B(T))^+ & \text{für Put-Option} \end{cases}$$

mit  $S = (S_1, \dots, S_d)^T$  und  $B(T)$  wie in Definition 2.2.1 definiert.

**Satz 2.2.4** Eine Call-Option mit der Definition des Maximums als Basket besitzt einen höheren Preis als eine Call-Option für einen Basket mit der Definition des Minimums.

Beweis: Zum Fälligkeitszeitpunkt  $t = T$  gilt für die Werte der Baskets

$$\max_{i=1, \dots, d} \{S_i(T)\} \geq \min_{i=1, \dots, d} \{S_i(T)\} .$$

Für die Payoffs der Call-Optionen folgt

$$\left( \max_{i=1, \dots, d} \{S_i(T)\} - K \right)^+ \geq \left( \min_{i=1, \dots, d} \{S_i(T)\} - K \right)^+ .$$

(Die umgekehrte Aussage folgt für Put-Optionen.)

□

**Satz 2.2.5** Eine Call-Option, der ein Basket mit dem arithmetischen Mittel zugrunde liegt, ist teurer als eine Call-Option für ein Basket des geometrischen Mittels.

Für den Beweis wird das folgende Lemma 2.2.6 benötigt, welches eine allgemeinere Ungleichung beweist.

**Lemma 2.2.6** Sei  $S_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, d$  mit

$$\prod_{i=1}^d S_i = 1 ,$$

dann gilt für die Summe

$$\sum_{i=1}^d S_i \geq d .$$

Beweis: Der Beweis wendet vollständige Induktion an.

Induktionsverankerung: ( $d = 2$ )

$$S_1 \cdot S_2 = 1 \iff S_1 = \frac{1}{S_2}$$

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \frac{1 + S_2^2}{S_2} = \frac{(S_2 - 1)^2 + 2S_2}{S_2} \\ &= \underbrace{\frac{(S_2 - 1)^2}{S_2}}_{\geq 0} + 2 \geq 2 \end{aligned}$$

Induktionsschritt: ( $d \Rightarrow d + 1$ )

Sei o.B.d.A  $0 \leq S_1 \leq S_1 \leq \dots \leq S_d \leq S_{d+1}$  mit  $Z_1 = S_1 \cdot S_{d+1}$  und deren Produkt

$$Z_1 \prod_{i=2}^d S_i = 1 .$$

Nach Induktionsvoraussetzung folgt  $Z_1 = 1$  mit  $S_1 \leq 1 \leq S_{d+1}$  (hier kann  $S_1$  nur den Wert 1 annehmen, wenn  $S_{d+1} = S_1$  gilt) und

$$\begin{aligned} d &\leq Z_1 + S_1 + S_2 + \dots + S_d \\ &= S_1 S_{d+1} + S_2 + \dots + S_d \\ &= S_1 + \dots + S_d + S_{d+1} + S_1 S_{d+1} - S_1 - S_{d+1} \\ \iff d + 1 &\leq S_1 + \dots + S_d + S_{d+1} + S_1 S_{d+1} - S_1 - S_{d+1} + 1 \\ &= S_1 + \dots + S_d + S_{d+1} + \underbrace{(S_1 - 1)(S_{d+1} - 1)}_{\leq 0} \\ \implies d + 1 &\leq S_1 + \dots + S_d + S_{d+1} . \end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 2.2.5: Sei  $G := \sqrt[d]{S_1 \cdot \dots \cdot S_d}$  und

$$Y_i := \frac{S_i}{G} \quad \forall i = 1, \dots, d \quad \text{mit} \quad \prod_{i=1}^d Y_i = 1 ,$$

dann gilt nach Lemma 2.2.6

$$\sum_{i=1}^d Y_i \geq d \iff \frac{1}{G} \sum_{i=1}^d S_i \geq d \iff \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d S_i \geq \left( \prod_{i=1}^d S_i \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Für die Payoffs der Call-Optionen folgt

$$\left( \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d S_i(T) - K \right)^+ \geq \left( \left( \prod_{i=1}^d S_i(T) \right)^{\frac{1}{n}} - K \right)^+.$$

(Die umgekehrte Aussage folgt auch hier für Put-Optionen.)

□

### 3 Binomialverfahren

Das Binomialmodell ist eine zeitdiskrete Approximation des Black-Scholes-Modells aus Abschnitt 2.1.1 und wurde ursprünglich zu dessen graphischer Darstellung konzipiert. Das Ziel dieses Verfahrens ist die Bestimmung des fairen Optionspreises für europäische und amerikanische Optionen. Dabei wird der Preis eines Wertpapierses zu jedem Zeitpunkt mit Hilfe eines diskreten multiplikativen Bernoulli-Prozesses berechnet und durch eine Baumstruktur dargestellt. Die Optionspreise werden anschließend rückwärts aus dem Wertpapierkurs berechnet. Dabei entsteht auch für die Optionspreise eine Baumstruktur.

#### 3.1 Konstruktion

In diesem Verfahren werden zwei Binomialbäume erstellt. Die Wurzel des ersten Baumes ist der vorgegebene Aktienkurs  $S_0 = S(0)$  zum Zeitpunkt  $t = 0$ , mit diesem kann man die verschiedenen Blätter des Binomialbaumes berechnen, die für die möglichen Aktienkurse  $S(T)$  zum Zeitpunkt  $T$  stehen. Der zweite Baum wird jedoch rückwärts berechnet. Man beginnt bei den Blättern, die sich aus den Werten einer Option zum Zeitpunkt  $t = T$  (vgl. Definition 2.1.3 und Definition 2.1.4) ergeben und berechnet mit diesen die Wurzel, welche der Optionspreis  $V_{00} = V(S, 0)$  ist.

Das Binomialverfahren setzt folgende Modellannahmen voraus:

- Es wird das Zeitintervall  $[0, T]$  betrachtet mit dem Fälligkeitszeitpunkt  $T$  und der Anzahl der zubeachtenden Perioden  $M$ . Daraus ergibt sich die Periodenlänge (vgl. [Kür08], S.23):

$$\Delta t = \frac{T}{M}$$

mit  $t_i = i \cdot \Delta t$  für  $i = 0, \dots, M$ .

- Der Kurs der Aktie in jedem Zeitintervall  $[t_i, t_{i+1}]$  mit  $i = 0, \dots, M - 1$  beträgt ([Ger10], Definition 3.5.4):

$$S_{i+1} = \begin{cases} u \cdot S_i & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ d \cdot S_i & \text{mit Wahrscheinlichkeit } (1 - p) \end{cases}$$

mit  $p \in [0, 1]$  und  $S_i := S(t_i)$ . Der Faktor  $u > 1$  stelle einen Aufwärtssprung und  $0 < d < 1$  einen Abwärtssprung dar.

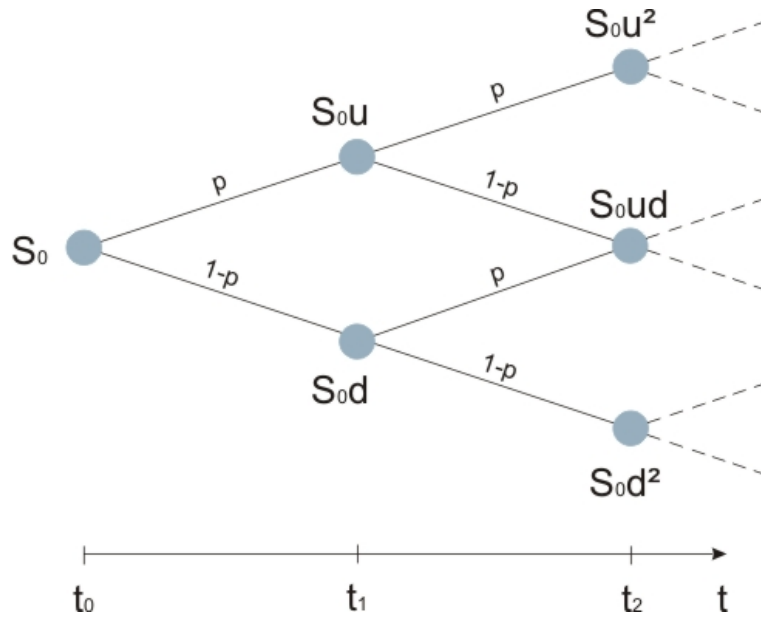


Abbildung 3.1.1: Kurs eines Wertpapiers

- Die Option habe den Ausübungspreis  $K$  zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$ .
- Der Finanzmarkt sei arbitragefrei und Aktienleerverkäufe seien zugelassen. ([Ger10], S.35)

$$\implies d \leq e^{r\Delta t} \leq u$$

(Fall 1:  $e^{r\Delta t} > u \implies$  Arbitrage durch Kauf von Bonds finanziert durch Aktienleerverkäufe

Fall 2:  $e^{r\Delta t} < d \implies$  Arbitrage durch Kauf von Aktien finanziert durch Kredite)

- Es existieren keine Transaktionskosten, keine Steuern und keine Dividendenausschüttungen.

### 3.2 Cox-Ross-Rubinstein-Modell

Zur Berechnung des Optionspreises mit dem Binomialverfahren müssen die Variablen  $u$ ,  $d$  und  $p$  bestimmt werden. Diese werden festgelegt, indem man die Erwartungswerte und Varianzen des kontinuierlichen Modells und des zeitdiskreten Modells gleichsetzt. Die dritte Gleichung, die man benötigt, wird durch das Modell, das man betrachtet, bestimmt. In dieser Arbeit wird ausschließlich auf das Cox-Ross-Rubinstein-Modell Bezug genommen. Durch dieses Modell erhält man den ursprünglichen Basiswert  $S_i$ , wenn der Kurs in einem Zeitschritt steigt und im nächsten fällt oder umgekehrt.

In Lemma 2.1.2 wurde gezeigt, dass für den Erwartungswert des kontinuierlichen Modells

gilt:

$$\begin{aligned} E[S(t_{i+1})] &= S(0)e^{rt_{i+1}} = S(0)e^{r(i+1)\Delta t} \\ &= S(t_i)e^{r\Delta t} = S_i e^{r\Delta t} . \end{aligned}$$

Im diskreten Modell ist der Erwartungswert gegeben durch:

$$E[S_{i+1}] = puS_i + (1-p)dS_i .$$

Setzt man die beiden Erwartungswerte gleich, erhält man

$$\begin{aligned} S_i e^{r\Delta t} &= puS_i + (1-p)dS_i \\ \iff e^{r\Delta t} &= pu + (1-p)d . \end{aligned} \tag{2}$$

Die Varianz im kontinuierlichen Modell wurde in Lemma 2.1.2 bestimmt:

$$\begin{aligned} \text{Var}[S(t_{i+1})] &= S^2(0)e^{2rt_{i+1}}(e^{\sigma^2 t_{i+1}} - 1) = S^2(0)e^{2r(i+1)\Delta t}(e^{\sigma^2(i+1)\Delta t} - 1) \\ &= S^2(t_i)e^{2r\Delta t}(e^{\sigma^2\Delta t} - 1) = S_i^2 e^{2r\Delta t}(e^{\sigma^2\Delta t} - 1) . \end{aligned}$$

Im diskreten Modell gilt für die Varianz:

$$\begin{aligned} \text{Var}[S_{i+1}] &= E[S_{i+1}^2] - (E[S_{i+1}])^2 \\ &= p(uS_i)^2 + (1-p)(dS_i)^2 - (puS_i + (1-p)dS_i)^2 . \end{aligned}$$

Setzt man die beiden Varianzen gleich, erhält man

$$\begin{aligned} S_i^2 e^{2r\Delta t}(e^{\sigma^2\Delta t} - 1) &= p(uS_i)^2 + (1-p)(dS_i)^2 - (puS_i + (1-p)dS_i)^2 \\ \iff e^{2r\Delta t}(e^{\sigma^2\Delta t} - 1) &= p(u)^2 + (1-p)(d)^2 - \underbrace{(pu + (1-p)d)^2}_{\stackrel{(2)}{=}e^{2r\Delta t}} \\ \iff e^{2r\Delta t}(e^{\sigma^2\Delta t} - 1) + e^{2r\Delta t} &= p(u)^2 + (1-p)(d)^2 \\ \iff e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} &= p(u)^2 + (1-p)(d)^2 . \end{aligned} \tag{3}$$

Im Cox-Ross-Rubinstein-Modell ist die dritte Gleichung gegeben mit:

$$u \cdot d = 1 . \tag{4}$$

Durch diese Wahl ist es möglich nach zwei Schritten denselben Aktienkurs  $S_{i+2} = S_i$  zu erhalten, da  $S_i = d(uS_i) = u(dS_i)$ .



Die Parameter  $u$ ,  $d$  und  $p$  folgen aus (2), (3) und (4).

Zuerst löst man die Gleichung (4) nach  $d$  und die Gleichung (2) nach  $p$  auf.

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{u} \\ p &= \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \end{aligned}$$

Setzt man diese beiden Gleichungen in (3) ein, erhält man

$$\begin{aligned} e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} &= p(u)^2 + (1-p)(d)^2 \\ &= \frac{e^{r\Delta t} - \left(\frac{1}{u}\right)}{u - \left(\frac{1}{u}\right)} u^2 + \left(1 - \frac{e^{r\Delta t} - \left(\frac{1}{u}\right)}{u - \left(\frac{1}{u}\right)}\right) \left(\frac{1}{u}\right)^2 \\ &= \frac{ue^{r\Delta t} - 1}{u^2 - 1} u^2 + \left(1 - \frac{ue^{r\Delta t} - 1}{u^2 - 1}\right) \left(\frac{1}{u}\right)^2 \\ \Leftrightarrow (u^2 - 1)e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} &= (ue^{r\Delta t} - 1)u^2 + ((u^2 - 1) - (ue^{r\Delta t} - 1)) \left(\frac{1}{u}\right)^2 \\ &= u^3 e^{r\Delta t} - u^2 + 1 - \left(\frac{1}{u}\right)^2 - \frac{e^{r\Delta t}}{u} + \left(\frac{1}{u}\right)^2 \\ &= u^3 e^{r\Delta t} - \frac{e^{r\Delta t}}{u} - u^2 + 1 \\ \Leftrightarrow (u^2 - 1)ue^{(2r+\sigma^2)\Delta t} &= (u^4 - 1)e^{r\Delta t} - (u^2 - 1)u \\ \Leftrightarrow (u^2 - 1)ue^{(r+\sigma^2)\Delta t} &= (u^2 - 1)(u^2 + 1) - (u^2 - 1)ue^{-r\Delta t} \\ \Leftrightarrow 0 &= (u^2 - 1)(u^2 - u(e^{(r+\sigma^2)\Delta t} + e^{-r\Delta t}) + 1) . \end{aligned}$$

Da  $u > 1$  nach Annahme und somit  $(u^2 - 1) > 0$  gilt, folgt:

$$(u^2 - u(\underbrace{e^{(r+\sigma^2)\Delta t} + e^{-r\Delta t}}_{=:2s}) + 1) = 0 .$$

wendet man die p,q-Formel an, folgen die Lösungen:

$$\begin{aligned} u &= s + \sqrt{s^2 - 1} \\ d &= s - \sqrt{s^2 - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad s &= \frac{1}{2}(e^{-r\Delta t} + e^{(r+\sigma^2)\Delta t}) \\ \text{und} \quad p &= \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} . \end{aligned}$$

### 3.3 Verfahren

Das Binomialverfahren kann man in eine Vorwärtsphase, bei der die zukünftigen Wertpapierkurse berechnet werden, und in eine Rückwärtsphase, bei der die Optionspreise bestimmt werden, aufteilen.

#### 3.3.1 Vorwärtsphase

In der Vorwärtsphase werden die zukünftigen Wertpapierkurse initialisiert. Dazu wird ein zweidimensionaler Binomialbaum erzeugt mit den Tupeln  $S(j, i) = S_{j,i}$  für  $1 \leq i \leq M$  und  $0 \leq j \leq i$ , diese geben den  $j$ -ten möglichen Aktienkurs zum Zeitpunkt  $t_i$  an.

**Definition 3.3.1** Der Startwert ist mit  $S(t_0) = S_0 = S_{0,0}$  gegeben. Die zukünftigen Wertpapierkurse werden mit (vgl. [Ger10], S.45)

$$S_{j,i} = S(t_0)u^j d^{i-j}$$

bestimmt.

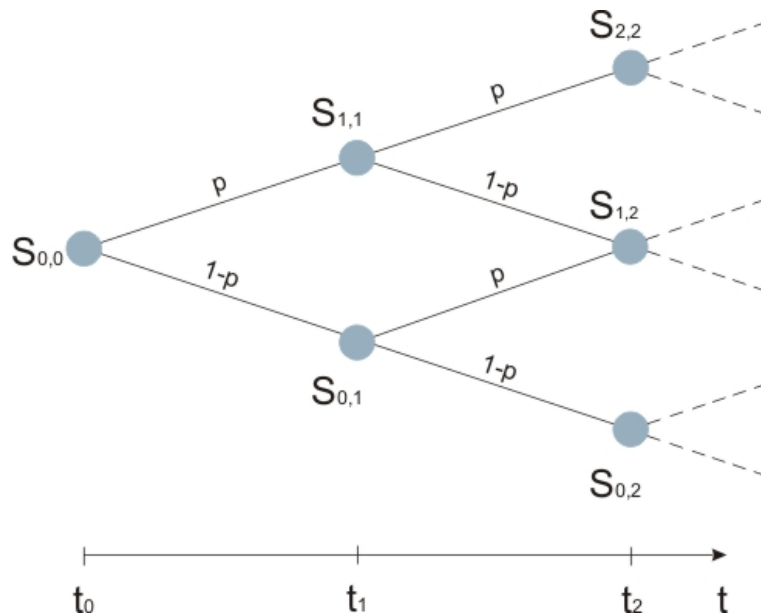


Abbildung 3.3.1: Vorwärtsphase des Binomialverfahrens

**Bemerkung 3.3.2** Für europäische Optionen genügt es  $S_{j,M}$  für alle  $j = 0, \dots, M$  zu berechnen, dies verringert die Laufzeit. Bei amerikanischen Optionen müssen jedoch auf Grund des frühzeitigen Ausübungsrechts alle  $S_{j,i}$  für  $1 \leq i \leq M$  und  $0 \leq j \leq i$  berechnet werden.

**Lemma 3.3.3** Die Anzahl der Knoten des Binomialbaumes wächst quadratisch mit der Anzahl der betrachtenden Perioden  $M$ .

Beweis: Sei  $d$  und  $u$  konstant mit  $S_i = d(uS_i) = u(dS_i)$ .

$a_i \hat{=}$  Anzahl der Knoten des Binomialbaums zum Zeitpunkt  $t_i$

$$\implies a_0 = 1$$

$$a_1 = a_0 + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$a_2 = a_1 + 3 = a_0 + 2 + 3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$a_3 = a_2 + 4 = a_1 + 3 + 4 = a_0 + 2 + 3 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$\vdots$

$$a_M = a_{M-1} + (M + 1) = 1 + 2 + \dots + (M + 1)$$

$$= \sum_{j=1}^{M+1} j = \frac{(M + 1)(M + 2)}{2} = \frac{M^2 + 3M + 2}{2}$$

$\implies$  quadratisches Wachstum mit  $M$

□

### 3.3.2 Rückwärtsphase

In der Rückwärtsphase werden die Optionspreise berechnet. Auch in dieser Phase wird ein zweidimensionaler Binomialbaum erzeugt mit den Tupeln  $V(j, i) = V_{j,i}$  für  $0 \leq i \leq M$  und  $0 \leq j \leq i$ , diese geben den  $j$ -ten möglichen Optionspreis zum Zeitpunkt  $t_i$  an. Der gesuchte Optionspreis zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist  $V(0, 0) = V_{0,0}$ . Bei der Berechnung der Optionspreise muss man zwei Fälle unterscheiden, da die Optionswerte zum Zeitpunkt  $t = M$  aus der Payoff-Funktion bekannt sind und die Optionswerte zu den anderen Zeitpunkten  $t_i$  für  $0 \leq i \leq (M - 1)$  rückwärts aus den Werten, die im Schritt zuvor  $t_{i+1}$  berechnet wurden, folgen.

**Definition 3.3.4** Seien alle  $S_{j,M}$  für  $0 \leq j \leq M$  und  $K$  gegeben. Die Optionspreise zum Fälligkeitszeitpunkt  $T = t_M$  mit  $0 \leq j \leq M$  sind

$$V_{j,M} = \begin{cases} (S_{j,M} - K)^+ & \text{für eine Call-Option,} \\ (K - S_{j,M})^+ & \text{für eine Put-Option.} \end{cases}$$

Die Werte einer europäischen Option zu den Zeitschritten  $t_i$  für  $0 \leq i < M$  mit  $0 \leq j \leq i$  sind

$$V_{j,i} = e^{-r\Delta t}(pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1}) .$$

Die Werte einer amerikanischen Option zu den Zeitschritten  $t_i$  für  $0 \leq i < M$  mit  $0 \leq j \leq i$  bei gegebenen Aktienkursen  $S_{j,i}$  sind

$$V_{j,i} = \begin{cases} \max\{(S_{j,i} - K)^+, e^{-r\Delta t}(pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1})\} & \text{für eine Call-Option,} \\ \max\{(K - S_{j,i})^+, e^{-r\Delta t}(pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1})\} & \text{für eine Put-Option.} \end{cases}$$

Hier wird zusätzlich überprüft, ob eine vorzeitige Ausübung erfolgt.

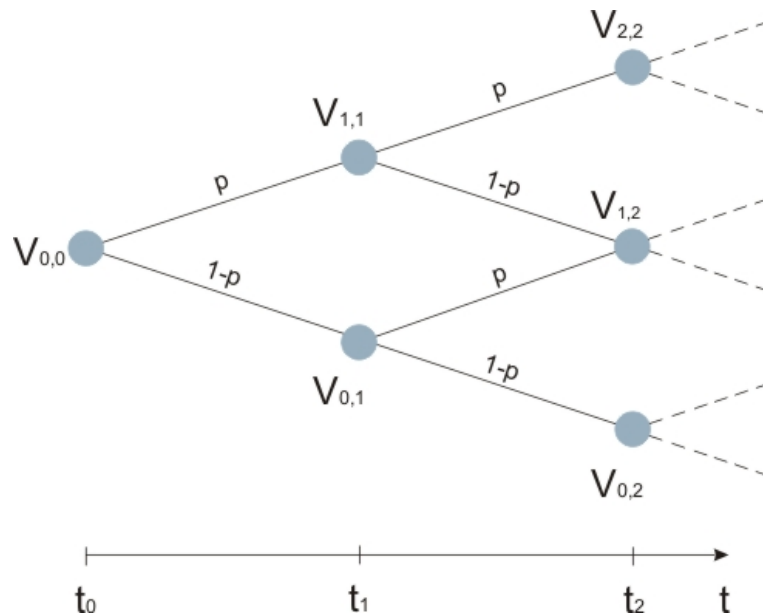


Abbildung 3.3.2: Rückwärtsphase des Binomialverfahrens

### 3.4 Eigenschaften

**Satz 3.4.1** Der Aufwand des Modells beträgt  $N = \mathcal{O}(M^2)$ .

Beweis: Da der Algorithmus zur Berechnung zwei Binomialbäume initialisiert, entspricht die Anzahl der Knoten im Binomialbaum dem Aufwand. In Lemma 3.3.3 wurde gezeigt, dass die Anzahl der Knoten quadratisch mit der Anzahl der betrachtenden Perioden  $M$  wächst. Daraus folgt die Behauptung.

□

**Satz 3.4.2** *Das eindimensionale Binomialmodell konvergiert für  $M \rightarrow \infty$  gegen das Black-Scholes-Modell mit Genauigkeit  $\varepsilon = \mathcal{O}(M^{-1})$ .*

Beweis: (vgl. [Kwo98], Seite 199)

Hierfür betrachtet man das Binomialverfahren für eine europäische Option, die wie in Definition 3.3.4 durch

$$V(S, t - \Delta t) = (pV(uS, t) + (1 - p)V(dS, t))e^{-r\Delta t}$$

definiert ist. Der heutige Zeitpunkt ist hier  $t - \Delta t$ .

Im Folgenden werden zwei Taylorpolynome (siehe [Weth10], Definition 17.5) in verschiedenen Punkten  $t$  und  $S$  vom Grad 2 gebildet.

$$\begin{aligned} & - V(S, t - \Delta t) + (pV(uS, t) + (1 - p)V(dS, t))e^{-r\Delta t} \\ & \approx -V(S, t) - \frac{\partial V}{\partial t}(S, t)(t - \Delta t - t) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(S, t)(t - \Delta t - t)^2 \\ & \quad + e^{-r\Delta t}V(S, t) + e^{-r\Delta t} \left( p(uS - S) \frac{\partial V}{\partial S}(uS, t) + (1 - p)(dS - S) \frac{\partial V}{\partial S}(dS, t) \right) \\ & \quad + \frac{1}{2} e^{-r\Delta t} \left( p(uS - S)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(uS, t) + (1 - p)(dS - S)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS, t) \right) \\ & = -(1 - e^{-r\Delta t})V(S, t) + \frac{\partial V}{\partial t}(S, t)(\Delta t) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(S, t)(\Delta t)^2 \\ & \quad + e^{-r\Delta t} S \frac{\partial V}{\partial S}(S, t)(p(u - 1) + (1 - p)(d - 1)) \\ & \quad + \frac{1}{2} e^{-r\Delta t} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t)(p(u - 1)^2 + (1 - p)(d - 1)^2) \end{aligned} \tag{5}$$

Die natürliche Exponentialfunktion wird durch ihre Taylorreihe

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

auf ganz  $\mathbb{R}$  dargestellt. Deshalb ist das Taylorpolynom vom Grad 2 von  $e^{-r\Delta t}$  gegeben durch

$$e^{-r\Delta t} \approx 1 - r\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) . \tag{6}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
e^{-r\Delta t}(p(u-1) + (1-p)(d-1)) &= e^{-r\Delta t}(pu + (1-p)d - p - (1-p)) \\
&= e^{-r\Delta t}(\underbrace{pu + (1-p)d - 1}_{\stackrel{(2)}{=}e^{r\Delta t}}) = e^{-r\Delta t}(e^{r\Delta t} - 1) \\
&= (1 - e^{-r\Delta t}) \stackrel{(6)}{=} r\Delta t - \mathcal{O}(\Delta t^2) \\
e^{-r\Delta t}(p(u-1)^2 + (1-p)(d-1)^2) &= e^{-r\Delta t}(p(u^2 - 2u + 1) + (1-p)(d^2 - 2d + 1)) \\
&= e^{-r\Delta t}(\underbrace{pu^2 + (1-p)d^2}_{\stackrel{(3)}{=}e^{(2r+\sigma^2)\Delta t}} - 2\underbrace{(pu + (1-p)d)}_{\stackrel{(2)}{=}e^{r\Delta t}} + 1) \\
&= e^{-r\Delta t}(e^{(2r+\sigma^2)\Delta t} - 2e^{r\Delta t} + 1) \\
&= e^{(r+\sigma^2)\Delta t} - 1 + e^{-r\Delta t} - 1 \\
&= (r + \sigma^2)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) - r\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\
&= \sigma^2\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) .
\end{aligned}$$

Wenn man diese beiden Gleichungen in Gleichung (5) einsetzt, erhält man

$$\begin{aligned}
&- V(S, t - \Delta t) + (pV(uS, t) + (1-p)V(dS, t))e^{-r\Delta t} \\
&\approx -(r\Delta t - \mathcal{O}(\Delta t^2))V(S, t) + \frac{\partial V}{\partial t}(S, t)(\Delta t) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(S, t)(\Delta t)^2 \\
&\quad + S \frac{\partial V}{\partial S}(S, t)(r\Delta t - \mathcal{O}(\Delta t^2)) + \frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t)(\sigma^2\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)) \\
&= \left( -rV(S, t) + \frac{\partial V}{\partial t}(S, t) + rS \frac{\partial V}{\partial S}(S, t) + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) \right) \Delta t \\
&\quad + \left( V(S, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(S, t) - S \frac{\partial V}{\partial S}(S, t) + \frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) \right) \mathcal{O}(\Delta t^2) . \\
\Rightarrow 0 &= \left( \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}(S, t) + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) + rS \frac{\partial V}{\partial S}(S, t) - rV(S, t)}_{\text{Black-Scholes Differentialgleichung}} \right) + \mathcal{O}(\Delta t)
\end{aligned}$$

Für  $\Delta t \rightarrow 0$  im Binomialmodell erhält man die Black-Scholes Differentialgleichung (siehe [Ger10], Satz 4.1.1) exakt bis zur ersten Ordnung, daraus folgt die Behauptung.

□

**Satz 3.4.3** Die Gesamtkomplexität beträgt  $\varepsilon(N) = \mathcal{O}(N^{-\frac{1}{2}})$  mit einer Konvergenzordnung von  $\frac{1}{2}$ .

Beweis: Die Gesamtkomplexität ergibt sich durch das Einsetzen des Aufwandes in die Genauigkeit. Die Konvergenzordnung entspricht dessen Exponenten.

□

### 3.5 Implementierung in MATLAB

In diesem Abschnitt wird ein MATLAB-Programm zur Berechnung des Optionspreises mit der Binomialmethode angegeben. Dabei beträgt der aktuelle Kurs der Aktie  $S_{0,0} = 50$  und dazu werden die Parameter

$$K = 60, \quad r = 0.04, \quad \sigma = 0.2, \quad T = 1, \quad M = 4$$

gewählt. Da bei MATLAB alle Matrizen und Vektoren bei 1 und nicht bei 0 beginnen, laufen die Schleifen von 1 bis  $M + 1$  und nicht wie in den Abschnitten zuvor von 0 bis  $M$ . Die Aktienkurse  $S_{j,i}$  für  $1 \leq i \leq M$  und  $0 \leq j \leq i$  sind in dem Programm durch  $S(j + 1, i + 1)$  gegeben. Das gleiche Prinzip gilt auch für die Optionspreise  $V_{j,i}$ , die durch die Matrixeinträge  $V(j + 1, i + 1)$  beschrieben werden. Der gesuchte Optionspreis zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist  $V(1, 1)$ . Es werden im weiteren Verlauf zwei Programm-Codes angegeben, da man zwischen europäischen und amerikanischen Optionen unterscheidet. Nach Bemerkung 3.3.2 genügt für europäische Optionen die Berechnung der  $S_{j,M}$  für  $0 \leq j \leq M$  im 1. Schritt und nach Definition 3.3.4 muss man im 3. Schritt das frühzeitige Ausübungsrecht für amerikanischen Optionen berücksichtigen.

```

% Eingabeparameter für europäische Optionen
K = 60; S0 = 50; r = 0.04; sigma = 0.2; T = 1; M = 2; type = 'call';

% Berechnung der Verfahrensparameter
dt = T/M;
beta = 0.5 * (exp(-r * dt) + exp((r + sigma^2) * dt));
u = beta + sqrt(beta^2 - 1);
d = 1/u;
p = (exp(r * dt) - d)/(u - d);

% 1. Schritt: Bestimmung der (M + 1) möglichen Aktienkurse zum Zeitpunkt t = T
for j = 1:(M + 1)
    S(j, M + 1) = S0 * u^(j - 1) * d^(M + 1 - j);
end

% 2. Schritt: Berechnung des Payoffs
switch type
    % für europäischen Put
    case 'put'
        for j = 1:(M + 1)
            V(j, M + 1) = max(K - S(j, M + 1), 0);
        end
    % für europäischen Call
    case 'call'
        for j = 1:(M + 1)
            V(j, M + 1) = max(S(j, M + 1) - K, 0);
        end
end

% 3. Schritt: Berechnung des heutigen Optionspreises
e = exp(-r * dt);
for i = M:-1:1
    for j = 1:i
        V(j, i) = e * (p * V(j + 1, i + 1) + (1 - p) * V(j, i + 1));
    end
end

% Ausgabe: Optionspreis zum Zeitpunkt t = 0
V(1, 1)

```

Algorithmus 1: Die Binomialmethode für europäische Optionen



```

% Eingabeparameter für amerikanische Optionen
K = 60; S0 = 50; r = 0.04; sigma = 0.2; T = 1; M = 2; type = 'call';

% Berechnung der Verfahrensparameter
dt = T/M;
beta = 0.5 * (exp(-r * dt) + exp((r + sigma^2) * dt));
u = beta + sqrt(beta^2 - 1);
d = 1/u;
p = (exp(r * dt) - d)/(u - d);

% 1. Schritt: Initialisierung der zukünftigen Wertpapierkurse
for i = 1:(M + 1)
    for j = 1:i
        S(j, i) = S0 * u^(j - 1) * d^(i - j);
    end
end

% 2. Schritt: Bestimmung des Payoffs
switch type
    % für amerikanischen Call
    case 'call'
        for j = 1:(M + 1)
            V(j, M + 1) = max(S(j, M + 1) - K, 0);
        end
    % für amerikanischen Put
    case 'put'
        for j = 1:(M + 1)
            V(j, M + 1) = max(K - S(j, M + 1), 0);
        end
end

% 3. Schritt: Berechnung des heutigen Optionspreises
e = exp(-r * dt);
switch type
    case 'call'
        for i = M:-1:1
            for j = 1:i
                V(j, i) = max(e * (p * V(j + 1, i + 1) + (1 - p) * V(j, i + 1)), max(S(j, i) - K, 0));
            end
        end
    case 'put'
        for i = M:-1:1
            for j = 1:i
                V(j, i) = max(e * (p * V(j + 1, i + 1) + (1 - p) * V(j, i + 1)), max(K - S(j, i), 0));
            end
        end
end

% Ausgabe: Optionspreis zum Zeitpunkt t = 0
V(1, 1)

```

Algorithmus 2: Die Binomialmethode für amerikanische Optionen

## 4 Produktbinomialmodell

Das Produktbinomialmodell ist ein mehrdimensionales Binomialmodell zur Berechnung des fairen Preises für europäische und amerikanische Basket-Optionen. In diesem Modell werden nicht direkt die Preise der Wertpapiere zu jedem Zeitpunkt bestimmt. Es muss zunächst die Verteilung des Wiener-Prozesses  $W(t)$  berechnet werden und dann die Formel des Aktienkurses des mehrdimensionalen Black-Scholes-Modells aus Satz 2.2.1 angewandt werden. Somit wird in der Vorwärtsphase ein Binomialbaum erstellt, der die eindimensionale Verteilung des Wiener-Prozesses angibt. Die Erweiterung auf  $d$  Dimensionen wird mittels des Tensorprodukts dieses Binomialbaumes erzeugt. Daher lässt sich auch ein  $d$ -dimensionaler Baum für die Aktienkurse berechnen, bei dem jede Kombination der möglichen Wertpapierkurse zu jedem Zeitpunkt berücksichtigt wird. In der Rückwärtsphase wird nur ein  $d$ -dimensionaler Baum erstellt, der die Optionspreise angibt. Im Weiteren wird gezeigt, dass jedoch der Aufwand dieses Modells stark unter der Dimension der Bäume leidet, da dieser exponentiell ansteigt.

### 4.1 Konstruktion

In diesem Verfahren werden drei  $d$ -dimensionale Bäume erstellt. Die Wurzel des ersten Baumes für den Wiener Prozess, der im Weiteren  $W$ -Baum genannt wird, ist bekannt, da  $W_0 = 0$ . Auch die Wurzel  $\underbrace{(S_{0,0}, \dots, S_{0,0})}_{d\text{-mal}}$  des Baumes, der die Aktienkurse angibt, ist bekannt, da die Wertpapierkurse zum Zeitpunkt  $t = 0$  gegeben sind. Dieser wird im Folgenden  $S$ -Baum genannt. Der dritte Baum, der die Optionspreise angibt, wird rückwärts berechnet. Man beginnt bei den Blättern, die sich aus dem Wert einer Basket-Option (vgl. Definition 2.2.3) ergeben und berechnet mit diesen die Wurzel, welche der Optionspreis  $\underbrace{V_{(0, \dots, 0), 0}}_{d\text{-mal}}$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist.

Das Produktbinomialverfahren setzt folgende Modellannahmen voraus:

- Man betrachtet das Zeitintervall  $[0, T]$  mit dem Fälligkeitszeitpunkt  $T$  und der Anzahl der zubetrachtenden Perioden  $M$ . Daraus ergibt sich die Periodenlänge:

$$\Delta t = \frac{T}{M}$$

mit  $t_i = i \cdot \Delta t$  für  $i = 0, \dots, M$ .

- Es gibt einen  $d$ -dimensionaler Multiindex  $\mathbf{m} \in \mathbb{N}_0^d$  mit

$$\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_d)$$

bei dem jeder Eintrag für eine Aktie steht und deren Indizes für den möglichen Kurs. Die beiden Normen des Multiindexes sind

$$|\mathbf{m}|_1 := \sum_{i=1}^d m_i \quad \text{und} \quad |\mathbf{m}|_\infty := \max_{1 \leq i \leq d} \{m_i\} .$$

- Das Produktbinomialmodell ist ein diskretes Modell, deshalb wird der eindimensionale  $W$ -Baum durch den einfachen Bernoulli-Prozess initialisiert. Es wird hier der Bernoulli-Prozess gewählt, da dieser für  $\Delta t \rightarrow \infty$  gegen den Wiener-Prozess konvergiert. Der eindimensionale  $W$ -Baum folgt aus

$$W_{l+1} = \begin{cases} v + W_l & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ n + W_l & \text{mit Wahrscheinlichkeit } (1-p) \end{cases}$$

mit  $v > 0$ ,  $n < 0$ ,  $W_l := W(t_l)$  und  $W_0 = 0$ .

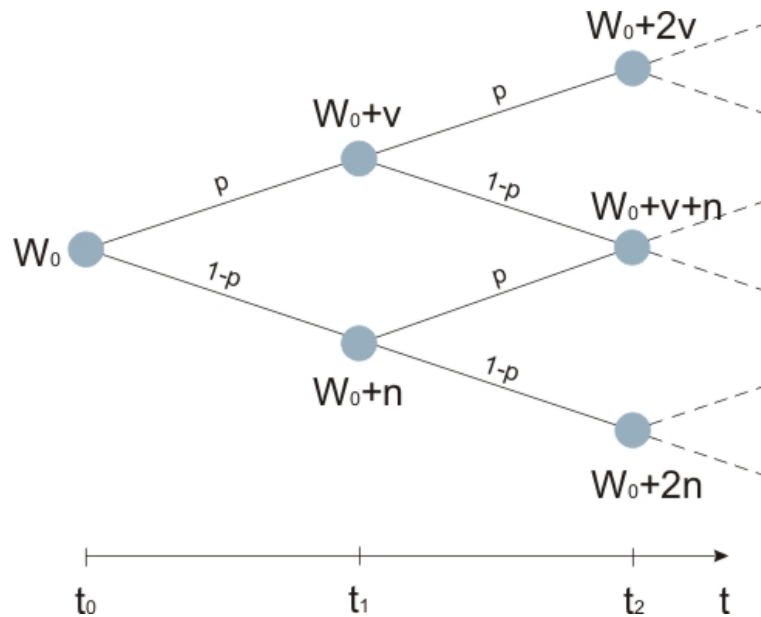


Abbildung 4.1.1: Der eindimensionale  $W$ -Baum des Produktbinomialmodells

- Jeder Aktienkurs  $S_i(t)$  der Basket-Option ist, wie in Satz 2.2.1 bewiesen, gegeben

durch

$$S_i(t) = S_i(0) \exp \left( \left( r - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d A_{ij}^2 \right) t + \sum_{j=1}^d A_{ij} W_j(t) \right)$$

für  $i = 1, \dots, d$ .

- Die Option habe den Ausübungspreis  $K$  zum Fälligkeitszeitpunkt  $T$ .
- Es existieren keine Transaktionskosten, keine Steuern und keine Dividendenausschüttungen.

Zur Berechnung des  $W$ -Baums müssen die Variablen  $v$ ,  $n$  und  $p$  bestimmt werden. Hier wird genauso wie im Binomialmodell vorgegangen, denn die Parameter werden festgelegt, indem man die Erwartungswerte und Varianzen des kontinuierlichen Modells und des zeitdiskreten Modells gleichsetzt. Die dritte Gleichung, die man benötigt, ist  $n = -v$ , da der  $W$ -Baum ein additiver Baum ist. Im Gegensatz dazu ist der Baum der Aktienkurse im Binomialmodell ein multiplikativer Baum. Der Erwartungswert des kontinuierlichen Wiener-Prozesses  $W_{l+1}$  ist definiert durch:

$$E[W_{l+1}|W_l] = W_l .$$

Für den Erwartungswert des diskreten Bernoulli-Prozess  $W_{l+1}$  gilt:

$$\begin{aligned} E[W_{l+1}|W_l] &= p(v + W_l) + (1 - p)(n + W_l) \\ &= pv + (1 - p)n + W_l(p + (1 - p)) = pv + (1 - p)n + W_l . \end{aligned}$$

Setzt man die beiden Erwartungswerte gleich, erhält man

$$\begin{aligned} W_l &= pv + (1 - p)n + W_l \\ \iff 0 &= pv + (1 - p)n . \end{aligned} \tag{7}$$

Die Varianz des Wiener-Prozesses  $W_{l+1}$  ist definiert durch:

$$Var[W_{l+1}|W_l] = \Delta t .$$

Bei dem Bernoulli-Prozess gilt für die Varianz:

$$\begin{aligned}
\text{Var}[W_{l+1}|W_l] &= E[W_{l+1}^2|W_l] - (E[W_{l+1}|W_l])^2 \\
&= p(v + W_l)^2 + (1 - p)(n + W_l)^2 - (pv + (1 - p)n + W_l)^2 \\
&= pv^2 + 2pvW_l + pW_l^2 + (1 - p)n^2 + 2(1 - p)nW_l + (1 - p)W_l^2 \\
&\quad - p^2v^2 - 2p(1 - p)vn - 2pvW_l - (1 - p)^2n^2 - 2(1 - p)nW_l - W_l^2 \\
&= pv^2 + (1 - p)n^2 - p^2v^2 - 2p(1 - p)vn - (1 - p)^2n^2 \\
&= pv^2 + (1 - p)n^2 - \underbrace{(pv + (1 - p)n)^2}_{\stackrel{(7)}{=}0} \\
&= pv^2 + (1 - p)n^2 .
\end{aligned}$$

Setzt man die beiden Varianzen gleich, erhält man

$$\Delta t = pv^2 + (1 - p)n^2 . \quad (8)$$

Im Produktbinomialmodell ist der  $W$ -Baum ein additiver Baum, deshalb wählt man als dritte Gleichung:

$$n = -v . \quad (9)$$

Durch diese Wahl ist es möglich nach zwei Schritten denselben Wiener-Prozess  $W_{l+2} = W_l$  zu erhalten, da  $W_l = n + (v + W_l) = v + (n + W_l)$ .

Die Parameter  $v$ ,  $n$  und  $p$  folgen aus (7),(8) und (9).

Wenn man die Gleichung (9) sowohl in die Gleichung (7) als auch in die Gleichung (8) einsetzt, so erhält man

$$\begin{aligned}
v &= \sqrt{\Delta t} \\
n &= -\sqrt{\Delta t} \\
p &= \frac{1}{2} .
\end{aligned}$$

Mit diesen Parametern kann man den Binomialbaum in  $W_{m,l}$  für  $0 \leq l \leq M$  und  $0 \leq m \leq l$  aufstellen. Man muss diesen nur einmal initialisieren, da man den  $d$ -dimensionalen Binomialbaum als Tensorprodukt von  $d$  gleichen  $W$ -Bäumen konstruiert. Der eindimensionale

$W$ -Baum mit  $M$  Zeitschritten wird durch (vgl. [Kür08], S.50)

$$W_M^1 := \{W_{m,l}\}_{\substack{0 \leq l \leq M \\ 0 \leq m \leq l}}$$

definiert. Der  $d$ -dimensionale  $W$ -Baum mit  $M$  Zeitschritten wird als Tensorprodukt

$$W_M^d = \underbrace{W_M^1 \otimes \dots \otimes W_M^1}_{d\text{-mal}} = \{W_{\mathbf{m},l}\}_{\substack{|\mathbf{m}|_\infty \leq l \\ 0 \leq l \leq M}}$$

definiert mit

$$W_{\mathbf{m},l} := (W_{m_1,l}, \dots, W_{m_d,l}) ,$$

bei dem jeder Eintrag für einen Punkt im  $d$ -dimensionale  $W$ -Baum steht.

Die gleiche Notation kann man auch auf den  $S$ -Baum anwenden. Somit wird der eindimensionale  $S$ -Baum mit  $M$  Zeitschritten definiert mit (vgl. [Kür08], S.51)

$$S_M^1 := \{S_{m,l}\}_{\substack{0 \leq l \leq M \\ 0 \leq m \leq l}} .$$

Der  $d$ -dimensionale  $S$ -Baum mit  $M$  Zeitschritten wird durch

$$S_M^d = \{S_{\mathbf{m},l}\}_{\substack{|\mathbf{m}|_\infty \leq l \\ 0 \leq l \leq M}}$$

definiert mit

$$S_{\mathbf{m},l} := (S_{m_1,l}, \dots, S_{m_d,l}) ,$$

bei dem jeder Eintrag für einen Punkt im  $d$ -dimensionalen  $S$ -Baum steht.

## 4.2 Verfahren

### 4.2.1 Vorwärtsphase

In der Vorwärtsphase wird erst der  $d$ -dimensionale  $W$ -Baum und dann der  $d$ -dimensionale  $S$ -Baum initialisiert.

**Definition 4.2.1** *Der Wiener Prozess zum Zeitpunkt  $t = t_l$  für  $1 \leq l \leq M$  und  $0 \leq m \leq l$  ist*

$$W_{m,l} = m \cdot \sqrt{\Delta t} - (l - m) \cdot \sqrt{\Delta t} .$$

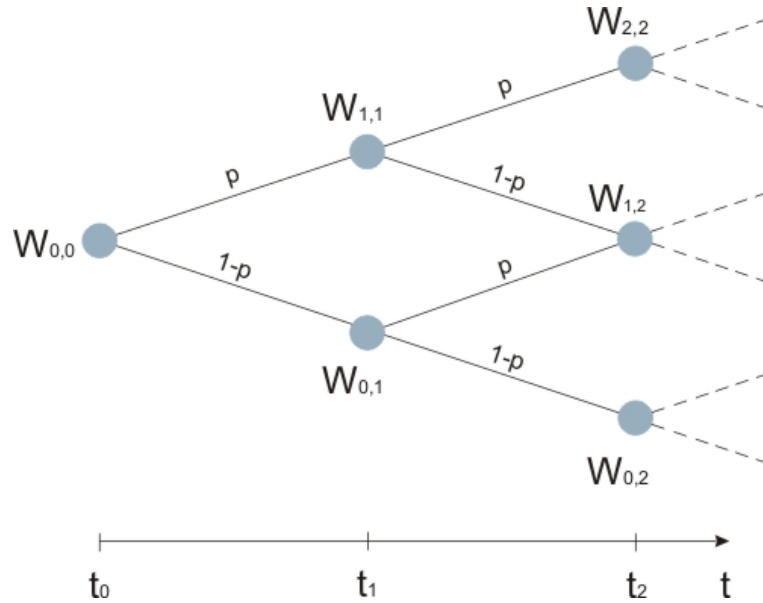


Abbildung 4.2.1: Der eindimensionale  $W$ -Baum der Vorwärtsphase

**Definition 4.2.2** Der Startwert sei mit  $(\underbrace{S_{0,0}, \dots, S_{0,0}}_{d\text{-mal}})$  gegeben. Die zukünftigen Wertpaarungskurse werden mit

$$S_{m_i,l} = S_i(0) \exp \left( \left( r - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d A_{ij}^2 \right) l \Delta t + \sum_{j=1}^d A_{ij} W_{m_j,l} \right)$$

für  $1 \leq l \leq M$  und  $0 \leq m \leq l$  bestimmt.

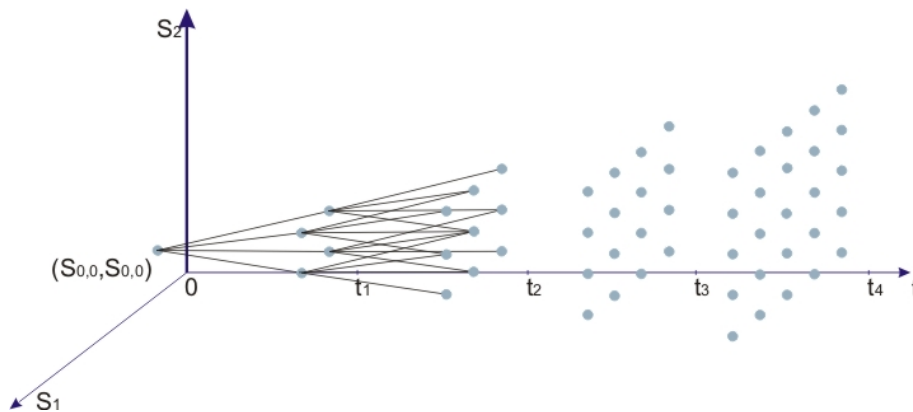


Abbildung 4.2.2: Der  $S^2$ -Baum der Vorwärtsphase für zwei Aktien

**Lemma 4.2.3** Die Anzahl der Knoten eines  $d$ -dimensionalen Produktbinomialbaumes wächst exponentiell mit der Anzahl der betrachtenden Perioden  $M$  und der Wachstumsrate  $(d + 1)$ .

Beweis: Betrachtet wird ein Baum aus  $d$  Wertpapieren mit  $M$  Zeitschritten.

$a_{i,d} \hat{=}$  Anzahl der Knoten des Binomialbaums zum Zeitpunkt  $t_i$  mit  $d$  Aktien

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_{M,1} &= \sum_{l=0}^M (l+1) && \text{siehe Lemma 3.3.3} \\ a_{M,2} &= \sum_{l=0}^M (l+1)^2 && \text{alle möglichen Kombinationen der Aktienkurse} \\ &&& \text{werden betrachtet, deshalb entsteht in jedem} \\ &&& \text{Schritt ein quadratisches Feld (siehe Abbildung 4.2.2)} \\ &&& \vdots \\ a_{M,d} &= \sum_{l=0}^M (l+1)^d && \text{zu jedem Zeitpunkt } t_l \text{ für } 0 \leq l \leq M \text{ ist die Anzahl} \\ &&& \text{der Knoten } (l+1)^d \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Der Aufwand beträgt  $\mathcal{O}(M^{d+1})$

□

#### 4.2.2 Rückwärtsphase

In der Rückwärtsphase werden die Optionspreise berechnet. Der dabei entstehende  $d$ -dimensionale Binomialbaum wird im Folgenden als  $V$ -Baum bezeichnet. Dieser  $V$ -Baum besteht aus Knoten  $V_{(m_1, \dots, m_d), l}$  für  $0 \leq l < M$ ,  $0 \leq m_i \leq l$  und  $0 \leq i \leq d$ , er sieht für zwei Aktien in der Baumstruktur gleich aus wie der  $S^2$ -Baum in Abbildung 4.2.2. Jeder Knoten beschreibt eine mögliche Kurskombination der  $d$  Wertpapiere zum Zeitpunkt  $t = t_l$ . Ziel ist es auch hier die Wurzel  $V_{\underbrace{(0, \dots, 0)}_{d\text{-mal}}, 0}$  zu berechnen, dieser Wert ist der Optionspreis zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Wie schon im Binomialmodell muss bei der Rückwärtsphase zwischen zwei Fällen unterschieden werden. Die Optionswerte zum Zeitpunkt  $t = M$  sind durch die Payoff-Funktion bekannt. Die Optionswerte zu den anderen Zeitpunkten  $t_i$  für  $0 \leq i \leq (M - 1)$  werden rückwärts berechnet mit den schon bekannten Optionspreisen zum Zeitpunkt  $t_{i+1}$ .

**Definition 4.2.4** Seien alle Werte des Baskets  $B_{(m_1, \dots, m_d), M}$  zum Zeitpunkt  $t = t_M$  (vgl. Definition 2.2.2) und  $K$  gegeben. Die Optionspreise zum Fälligkeitszeitpunkt  $t = t_M$  mit



$0 \leq m_i \leq M$  und  $0 \leq i \leq d$  sind

$$V_{(m_1, \dots, m_d), M} = \begin{cases} (B_{(m_1, \dots, m_d), M} - K)^+ & \text{für eine Call-Option,} \\ (K - B_{(m_1, \dots, m_d), M})^+ & \text{für eine Put-Option.} \end{cases}$$

Die Werte einer europäischen Basket-Option zu den Zeitschritten  $t_l$  für  $0 \leq l < M$  mit  $0 \leq m_i \leq l$  sind

$$V_{(m_1, \dots, m_d), l} = e^{-r\Delta t} \left( \left( \frac{1}{2} \right)^d \left( \sum_{k_d=m_d}^{m_d+1} \cdots \sum_{k_1=m_1}^{m_1+1} V_{(k_1, \dots, k_d), l+1} \right) \right) .$$

Die Werte einer amerikanischen Basket-Option zu den Zeitschritten  $t_l$  für  $0 \leq l < M$  mit  $0 \leq m_i \leq l$  bei gegebenen Baskets  $B_{(m_1, \dots, m_d), l}$  sind

$$V_{(m_1, \dots, m_d), l} = \begin{cases} \max\{(B_{(m_1, \dots, m_d), l} - K)^+, \\ e^{-r\Delta t} \left( \left( \frac{1}{2} \right)^d \left( \sum_{k_d=m_d}^{m_d+1} \cdots \sum_{k_1=m_1}^{m_1+1} V_{(k_1, \dots, k_d), l+1} \right) \right)\} & \text{für eine Call-Option,} \\ \max\{(K - B_{(m_1, \dots, m_d), l})^+, \\ e^{-r\Delta t} \left( \left( \frac{1}{2} \right)^d \left( \sum_{k_d=m_d}^{m_d+1} \cdots \sum_{k_1=m_1}^{m_1+1} V_{(k_1, \dots, k_d), l+1} \right) \right)\} & \text{für eine Put-Option.} \end{cases}$$

### 4.3 Eigenschaften

**Satz 4.3.1** Der Aufwand des Produktbinomialmodells beträgt  $N = \mathcal{O}(M^{d+1})$ .

Beweis: Da der Algorithmus zur Berechnung drei Produktbinomialbäume initialisiert, entspricht die Anzahl der Knoten im Produktbinomialbaum dem Aufwand. In Lemma 4.2.3 wurde gezeigt, dass die Anzahl der Knoten exponentiell mit der Anzahl der zubetrachtenden Perioden  $M$  und der Wachstumsrate  $(d + 1)$  wächst. Daraus folgt die Behauptung. □

**Satz 4.3.2** Das Produktbinomialmodell besitzt eine Genauigkeit von  $\varepsilon = \mathcal{O}(M^{-1})$ .

Beweis: Siehe [Omb88]

**Satz 4.3.3** Die Gesamtkomplexität beträgt  $\varepsilon(N) = \mathcal{O}(N^{-\frac{1}{d+1}})$  mit einer Konvergenzordnung von  $\frac{1}{d+1}$ .

Beweis: Die Gesamtkomplexität ergibt sich durch das Einsetzen des Aufwandes in die Genauigkeit. Die Konvergenzordnung entspricht dessen Exponenten. □

## 4.4 Implementierung in MATLAB

In diesem Abschnitt wird eine Implementierung mit MATLAB des Produktbinomialmodells angegeben. Dabei werden folgende Parameter gewählt:

$$K = 60, \quad S_i = 50 \quad \forall i = 1, \dots, d, \quad r = 0.04, \quad d = 10, \quad \sigma_i = 0.2, \quad \rho_{ij} = 0.25 \quad \forall i \neq j,$$

$$T = 1, \quad M = 4, \quad baskettype = 'geom', \quad type = 'call'.$$

In Kapitel 3.5 wurde in dem Programm-Code der Binomialmethode das Zeitintervall  $[1, M + 1]$  betrachtet, anstatt  $[0, M]$ . Dies ist auch der Fall bei der Implementierung der Produktbinomialmethode, da Vektoren und Matrizen in MATLAB bei 1 und nicht bei 0 beginnen. Deshalb ist die Ausgabe der Matrixeintrag  $V(1, 1)$ , in dem der heutige Optionspreis abgespeichert wird. Der Algorithmus 3 gibt eine Implementierung der Produktbinomialmethode für europäische Optionen und einer allgemeinen Anzahl an Aktien in MATLAB an. Die Eingabeparameter dieses Algorithmus sind ein Beispiel für  $d = 10$ . Die gewünschten Parameter müssen vor dem Aufruf des Programmes eingegeben werden. Die Aktienkurse  $S_i$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  und die Volatilitäten  $\sigma_i$  werden als Vektoren *Start* und *sigma* angegeben. Die Korrelationen der Wertpapiere werden als Matrix angegeben. Die Angabe einer unteren Dreiecksmatrix ist ausreichend, da es sich bei der Matrix der Korrelationen um eine symmetrische Matrix handelt und in dem Programm nur die untere Dreiecksmatrix berücksichtigt wird.

In Algorithmus 3 wird zuerst die Kovarianzmatrix und deren Cholesky-Zerlegung berechnet. Im 1. Schritt wird nach Definition 4.2.1 der Wiener-Prozess bestimmt und in der 2-dimensionalen Matrix  $W$  gespeichert. Eine 3-dimensionale Matrix  $z$  wird initialisiert, diese gibt alle Möglichkeiten an  $d$  Aktien mit jeweils  $1, 2, \dots, h$  möglichen Ausgängen für  $1 \leq h \leq (M + 1)$  zu kombinieren. Außerdem werden nach Definition 4.2.2 die Wertpapierkurse für den Zeitpunkt  $t = M + 1$  berechnet, die in der Matrix  $S$  gespeichert werden. Im 2. Schritt werden die Payoffs berechnet, dabei muss zwischen den verschiedenen Arten eines Baskets unterschieden werden. Je nach Wahl zwischen einer Call- und Put-Option wird der Payoff bestimmt. Im 3. Schritt speichert die Matrix  $q$  alle Möglichkeiten die Zahlen 0 und 1 mit jeweils  $2^{(d-1)}$  möglichen Ausgängen zu kombinieren. Die Addition der Einträge der beiden Matrizen  $z$  und  $q$  gibt die Indizes der Optionspreise  $V$  an, die bei der Berechnung eines Knotens berücksichtigt werden müssen. Damit werden dann nach Definition 4.2.4 die „inneren Knoten“ und der gesuchte Optionspreis zum Zeitpunkt  $t = 0$  berechnet. Die Optionspreise werden in einer 2-dimensionalen Matrix  $V$  gespeichert.

```

% Eingabeparameter für europäische Basket-Optionen
K = 60; r = 0.04; T = 1; M = 4; d = 10;
Start = [50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50];
sigma = [0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2];
corr = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
        0.25, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
        0.25, 0.25, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
        0.25, 0.25, 0.25, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0
        0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 1, 0, 0, 0, 0, 0
        0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 1, 0, 0, 0, 0
        0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 1, 0, 0, 0
        0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 1, 0, 0
        0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 1, 0
        0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 1];
baskettype = 'geom'; type = 'call';

% Berechnung der Verfahrensparameter
dt = T/M;
for i = 1:d
    for j = 1:d
        if (i == j)
            cov(i, j) = sigma(i)^2 * corr(i, i);
        elseif (i > j)
            cov(i, j) = sigma(i) * sigma(j) * corr(i, j);
        else
            cov(i, j) = sigma(i) * sigma(j) * corr(j, i);
        end
    end
end
A = chol(cov);

% 1. Schritt: Bestimmung der möglichen Aktienkurse von d Wertpapieren
% zum Zeitpunkt t = T
for l = 2:(M + 1)
    for m = 1:l
        W(m, l) = (m - 1) * sqrt(dt) - (l - m) * sqrt(dt);
    end
end
% alle Möglichkeiten d Aktien mit jeweils 1, 2, ..., h möglichen Ausgängen
% für 1 ≤ h ≤ (M + 1) zu kombinieren
z = zeros((M + 1)^d, d);
for i = 1:d
    for h = 1:(M + 1)
        for j = 1:h
            for c = 1:(h^(d - i))
                for k = 1:(h^(i - 1))
                    z(((h^(d - i)) * (j - 1)) + ((h^(d - (i - 1))) * (k - 1)) + c, i, h) = j;
                end
            end
        end
    end
end
end
end
end

```

```

for i = 1:d
    z1 = 0;
    S(i, 1, 1) = Start(i);
    for h = 1:d
        z1 = z1 + (A(i, j)^2);
    end
    for j = 1:((M + 1)^d)
        z2 = 0;
        for h = 1:d
            z2 = z2 + A(i, j) * W(z(j, h, M + 1), M + 1);
        end
        S(i, j, M + 1) = Start(i) * exp((r - 0.5 * z1) * M * dt + z2);
    end
end

% 2. Schritt: Berechnung des Payoffs
% Bestimmung des Wertes des Baskets, je nach der Wahl des Basket-Typs
for j = 1:((M + 1)^d)
    switch baskettype
        case 'arithm'
            summe = 0;
            for i = 1:d
                summe = summe + S(i, j, M + 1);
            end
            B(j) = (summe/d);
        case 'geom'
            produkt = 1;
            for i = 1:d
                produkt = produkt * S(i, j, M + 1);
            end
            B(j) = (produkt)^(1/d);
        case 'max'
            m = zeros(1, d);
            for i = 1:d
                m(1, i) = S(i, z(j, i, M + 1), M + 1);
            end
            B(j) = max(m);
        case 'min'
            m = zeros(1, d);
            for i = 1:d
                m(1, i) = S(i, j, M + 1);
            end
            B(j) = min(m);
    end
    switch type
        % für europäischen Call
        case 'call'
            V(j, M + 1) = max(B(j) - K, 0);
        % für europäischen Put
        case 'put'
            V(j, M + 1) = max(K - B(j), 0);
    end
end
end

```

```

% 3. Schritt: Berechnung des heutigen Optionspreises
% alle Möglichkeiten die Zahlen 0 und 1 mit jeweils  $2^{(d-1)}$  möglichen Ausgängen zu kombinieren
for i = 1:d
    for j = 0:1:1
        for c = 1:(2^(d-i))
            for k = 1:(2^(i-1))
                q(((2^(d-i))) + ((2^(d-(i-1))) * (k-1)) + c, i, 1) = j;
            end
        end
    end
end
end
e = exp(-r * dt);
for t = M:-1:-1
    % Berechnung der Optionspreise (die „inneren Knoten“)
    for u = 1:(t^d)
        summe = 0;
        for v = 1:(2^d)
            for p = 1:d
                s(u, p, t) = z(u, p, t) + q(v, p, 1);
            end
            for w = 1:((t+1)^d)
                if (s(u, :, t) == z(w, :, t+1))
                    summe = summe + V(w, t+1);
                end
            end
        end
    end
    V(u, t) = e * ((0.5^d) * summe);
end
end

% Ausgabe: Optionspreis zum Zeitpunkt t = 0
V(1, 1);

```

Algorithmus 3: Die Produktbinomialmethode für europäische Optionen

Bei der Bestimmung der Optionspreise von europäischen und amerikanischen Optionen mit dem Produktbinomialmodell unterscheiden sich die jeweiligen MATLAB-Programme in dem 1. Schritt und in dem 3. Schritt. Im Folgenden werden nur für das Produktbinomialmodell für amerikanische Optionen im Algorithmus 4 der Programm-Code des 1. Schrittes und im Algorithmus 5 der Programm-Code des 3. Schrittes angegeben. Im 1. Schritt muss man in diesem Fall alle zukünftigen Wertpapierkurse berechnen, die dann im 3. Schritt wegen des frühzeitigen Ausübungsrechts aufgerufen werden.

```

% 1. Schritt: Bestimmung der möglichen Aktienkurse von d Wertpapieren
% zum Zeitpunkt  $t = T$ 
for l = 2:(M + 1)
    for m = 1:l
         $W(m, l) = (m - 1) * \text{sqrt}(dt) - (l - m) * \text{sqrt}(dt);$ 
    end
end
% alle Möglichkeiten d Aktien mit jeweils 1, 2, ..., h möglichen Ausgängen
% für  $1 \leq h \leq (M + 1)$  zu kombinieren
z = zeros((M + 1)^d, d);
for i = 1:d
    for h = 1:(M + 1)
        for j = 1:h
            for c = 1:(h^(d - i))
                for k = 1:(h^(i - 1))
                     $z(((h^(d - i)) * (j - 1) + ((h^(d - (i - 1))) * (k - 1)) + c, i, h) = j;$ 
                end
            end
        end
    end
end
for i = 1:d
    z1 = 0;
     $S(i, 1, 1) = \text{Start}(i);$ 
    for h = 1:d
         $z1 = z1 + (A(i, j)^2);$ 
    end
    for m = 2:(M + 1)
        for j = 1:(m^d)
            z2 = 0;
            for h = 1:d
                 $z2 = z2 + A(i, j) * W(z(j, h, m), m);$ 
            end
             $S(i, j, m) = \text{Start}(i) * \text{exp}((r - 0.5 * z1) * (m - 1) * dt + z2);$ 
        end
    end
end
end

```

Algorithmus 4: Der 1. Schritt der Produktbinomialmethode für amerikanische Optionen

```

% 3. Schritt: Berechnung des heutigen Optionspreises
% alle Möglichkeiten die Zahlen 0 und 1 mit jeweils  $2^{(d-1)}$  möglichen Ausgängen zu kombinieren
for i = 1:d
    for j = 0:1:1
        for c = 1:(2^(d-i))
            for k = 1:(2^(i-1))
                q(((2^(d-i))) + ((2^(d-(i-1))) * (k-1)) + c, i, 1) = j;
            end
        end
    end
end
end
e = exp(-r * dt);
for t = M:-1:-1
    % Berechnung der Optionspreise (die „inneren Knoten“)
    for u = 1:(t^d)
        summe = 0;
        for v = 1:(2^d)
            for p = 1:d
                s(u, p, t) = z(u, p, t) + q(v, p, 1);
            end
        end
        for w = 1:((t+1)^d)
            if (s(u, :, t) == z(w, :, t+1))
                summe = summe + V(w, t+1);
            end
        end
    end
end
switch baskettype
    case 'arithm'
        basket = 0;
        for i = 1:d
            basket = basket + S(i, z(j, i, t), t);
        end
        basket = (basket/d);
    case 'geom'
        basket = 1;
        for i = 1:d
            basket = basket * S(i, z(j, i, t), t);
        end
        basket = (basket)^(1/d);
    case 'max'
        m = zeros(1, d);
        for i = 1:d
            m(1, i) = S(i, z(j, i, t), t);
        end
        basket = max(m);
    case 'min'
        m = zeros(1, d);
        for i = 1:d
            m(1, i) = S(i, z(j, i, t), t);
        end
        basket = min(m);
end
end

```

```

switch type
  % für amerikanischen Call
  case 'call'
    
$$V(u, t) = \max(\text{basket} - K, e * ((0.5^d) * \text{summe}));$$

  % für amerikanischen Put
  case 'put'
    
$$V(u, t) = \max(K - \text{basket}, e * ((0.5^d) * \text{summe}));$$

  end
end
end

% Ausgabe: Optionspreis zum Zeitpunkt  $t = 0$ 
V(1, 1);

```

Algorithmus 5: Der 3. Schritt der Produktbinomialmethode für amerikanische Optionen



## 5 Numerische Ergebnisse

In den vorangegangenen Abschnitten wurde zunächst das Binomialverfahren vorgestellt und das darauf aufbauende Produktbinomialverfahren für europäische und amerikanische Basket-Optionen. In diesem Kapitel werden die vier verschiedenen Arten der Basket-Optionen verglichen. Dazu bewertet man europäische Call- und Put-Optionen unter der gleichen Parameterwahl mit dem Produktbinomialmodell. Schließlich werden numerische Ergebnisse über das Konvergenzverhalten des Produktbinomialverfahrens abhängig von den verschiedenen Baskets zusammengestellt. In dieser Arbeit werden europäische Call- und Put-Optionen geometrischer Baskets und eine europäische Call-Option für das Maximum als Basket mit deren exakten Lösung verglichen, da für diese eine geschlossene Bewertungsformel existiert (siehe [Jia05], Seite 115/116). Für arithmetische Baskets werden zum Vergleich Optionspreise mittels des Monte-Carlo Verfahrens mit einer sehr hohen Anzahl an Simulationen berechnet. Die Konvergenzgeschwindigkeit des Produktbinomialverfahrens für amerikanische Optionen geometrischer und arithmetischer Baskets wird mit einer Tabelle dargestellt, in dieser werden die Differenzen aufeinanderfolgender Perioden angegeben.

### 5.1 Vergleich von Optionen auf verschiedenen Baskets

In Definition 2.2.2 wurden vier Möglichkeiten vorgestellt den Wert eines Baskets von  $d$  Wertpapieren zu definieren: das arithmetische Mittel, das geometrische Mittel, das Maximum und das Minimum. Es werden unter der gleichen Parameterwahl mit ansteigender Wertpapieranzahl  $d$  die europäischen Optionspreise der vier unterschiedlichen Baskets mit dem Produktbinomialverfahren bestimmt. Die Ergebnisse werden in Abbildung 5.1.1 graphisch dargestellt. Die Parameter dieser Abbildungen sind:

$$K = 60, \quad S_i = 50 \quad \forall i = 1, \dots, d, \quad r = 0.04,$$

$$\sigma_i = 0.2, \quad \rho_{ij} = 0.25 \quad \forall i \neq j, \quad T = 1, \quad M = 4$$

Die Abbildung zeigt, dass sowohl die Call-Optionen als auch die Put-Optionen für nur eine Aktie ( $d = 1$ ) die gleichen Optionswerte besitzen. Dieser Fall ist trivial, da basierend auf nur einem Wertpapier das Produktbinomialmodell für jeden Baskettyp einem Binomialmodell entspricht, bei dem die künftigen Aktienkurse mit Satz 2.1.1, der aus dem Black-Scholes Modell folgt, bestimmt werden. Man kann auch die Aussagen aus Satz 2.2.4 und Satz 2.2.5 beobachten, da die Call-Option mit der Definition des Maximums als Basket teurer ist als eine Call-Option basierend auf einem Minimum als Basket. Auch die

Call-Option mit dem arithmetischen Mittel hat einen höheren Preis als die Call-Option für ein Basket des geometrischen Mittels. Die umgekehrten Aussagen kann man in Abbildung 5.1.1 auch für die Put-Option sehen.

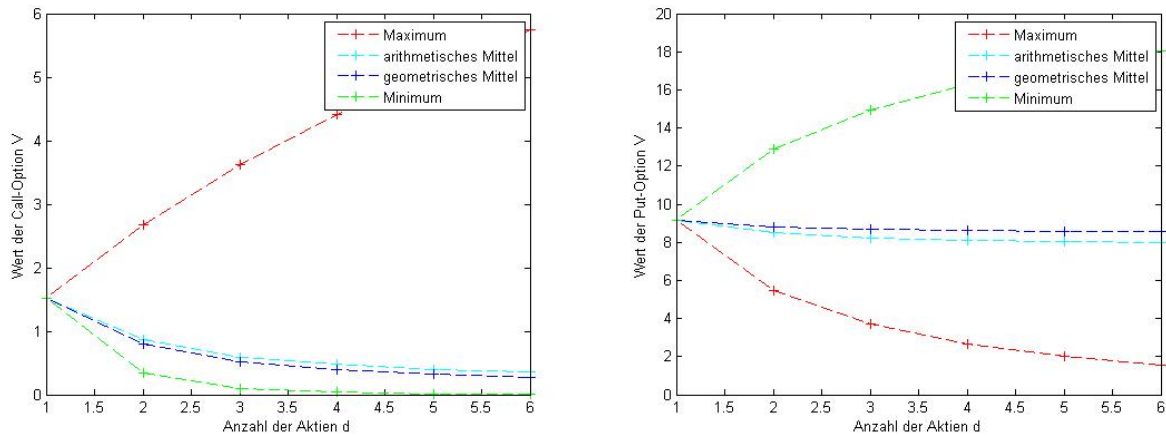


Abbildung 5.1.1: Optionspreise für verschiedene Baskets zu variabler Dimension

## 5.2 Konvergenzverhalten für europäische Optionen

Im Folgenden wird für die verschiedenen Baskets und Optionen das Konvergenzverhalten betrachtet. Für europäische Call- und Put-Optionen mit geometrischem Basket ist es möglich das Produktbinomialverfahren mit der geschlossenen Lösungsformel zu vergleichen. Für die anderen europäischen Optionen der Baskets existiert keine allgemeine geschlossene Lösung, hier wird beispielhaft der arithmetische Basket betrachtet. Dafür werden Referenzlösungen mittels des Monte-Carlo Verfahrens mit  $10^8$  Simulationen erzeugt und der relative Fehler des Produktbinomialmodells berechnet.

In Abbildung 5.2.1 wird das Konvergenzverhalten des Produktbinomialverfahrens für Call- und Put-Optionen dieser beiden Baskets basierend auf zwei Wertpapieren ( $d = 2$ ) mit den Parametern

$$K = 60, \quad S_1 = 50, \quad S_2 = 50, \quad r = 0.04,$$

$$\sigma_1 = 0.2, \quad \sigma_2 = 0.2, \quad \varrho_{12} = \varrho_{21} = 0.25, \quad T = 1$$

graphisch dargestellt. Dazu wurde der relative Fehler in Abhängigkeit des Aufwandes bestimmt. Der Aufwand des Produktbinomialverfahren beträgt nach Satz 4.3.1  $\mathcal{O}(M^{d+1})$ . Für diese Abbildung wurden die zubeachtenden Perioden  $M = 20, 40, 55, 65, 80, 100, 120, 140, 160$  und  $M = 15, 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160$  gewählt. Die Regressionsgerade wurde zusätzlich in jede Graphik eingefügt, da diese die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens für den zubeachtenden Fall angibt. Nach

Satz 4.3.3 beträgt für  $d = 2$  die Konvergenzordnung des Verfahrens  $\frac{1}{3}$ .

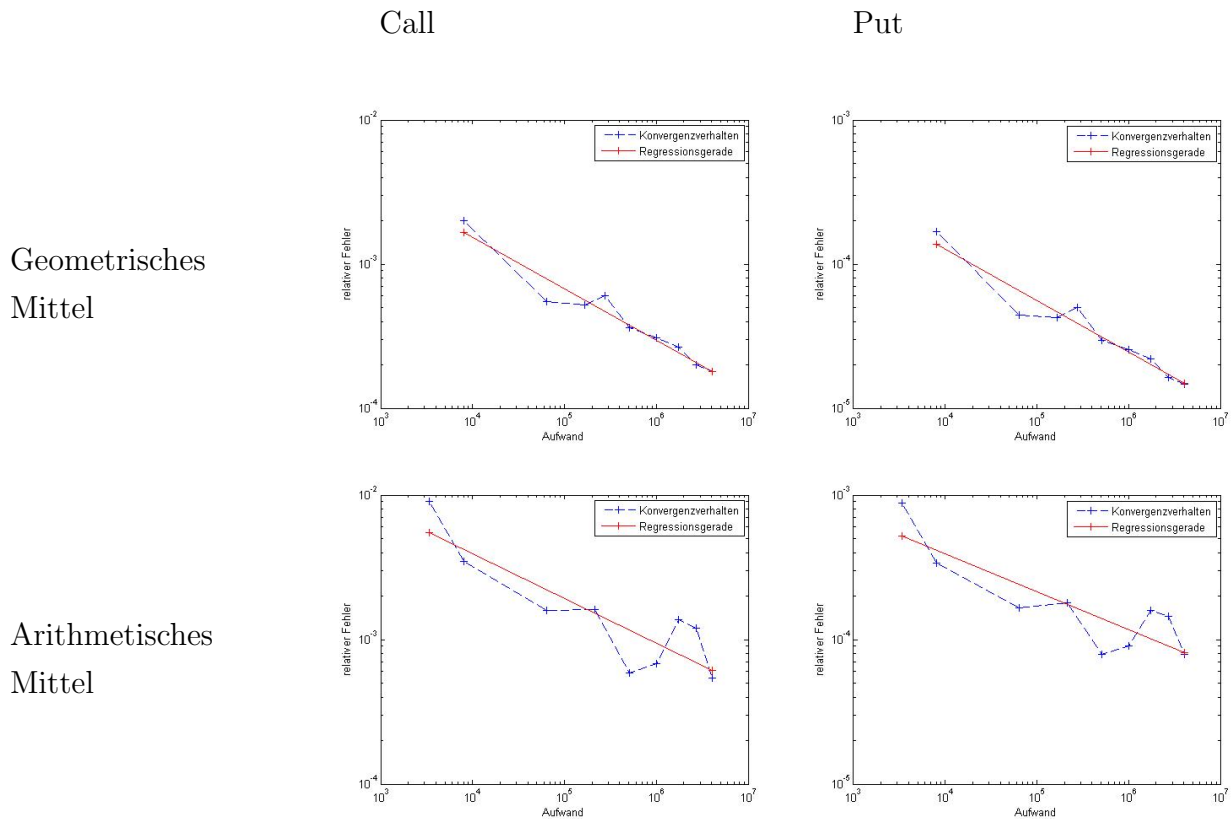


Abbildung 5.2.1: Konvergenzverhalten des Produktbinomialmodells für  $d = 2$

Die Steigung der Regressionsgerade für den geometrischen Basket beträgt bei der Call-Option  $-0.3567299$  und für die Put-Option  $-3.57639397$ . Bei dem arithmetischen Basket hat die Steigung einen Wert von  $-0.3079980048$  für die Call-Option und  $-0.260812484$  für den Put.

In Abbildung 5.2.2 wird eine europäische Call-Option mit dem Maximum als Basket mit deren exakter Lösung verglichen. Dessen geschlossene Bewertungsformel gilt nur für einen Ausübungspreis  $K = 0$ . Alle anderen Parameter werden wie in Abbildung 5.2.1 gewählt. Die betrachtenden Perioden sind hier  $M = 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160$ .

Die Steigung der Regressionsgeraden in Abbildung 5.2.2 beträgt  $-0.309159285126$ . Man kann außerdem beobachten, dass die Werte des relativen Fehlers sehr nahe an dieser Regressionsgeraden liegen.

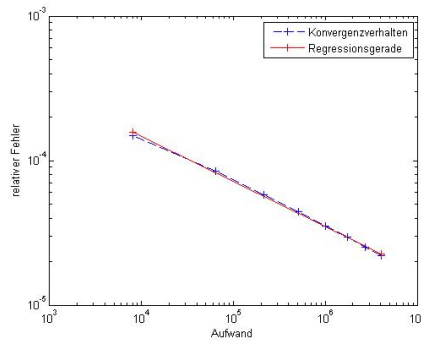


Abbildung 5.2.2: Konvergenzverhalten des Produktbinomialmodells einer Call-Option mit Maximum-Basket für  $d = 2$

Für europäische Call- und Put-Optionen basierend auf drei Wertpapieren ( $d = 3$ ) wird in Abbildung 5.2.3 das Konvergenzverhalten des Produktbinomialverfahrens graphisch dargestellt. Hierzu werden wie in Abbildung 5.2.1 Optionen basierend auf dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel betrachtet. Es wird für den geometrischen Basket dessen geschlossene Bewertungsformel und für den arithmetischen Basket Referenzlösungen verwendet, die mittels des Monte-Carlo Verfahrens mit  $10^8$  Simulationen erzeugt wurden. Jedoch werden hier die Werte mit einem niedrigeren Aufwand bestimmt, dies liegt an der Wahl der zubetrachtenden Perioden  $M = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$ . Die Parameter dieser Abbildungen sind:

$$K = 60, \quad S_1 = 50, \quad S_2 = 50, \quad S_3 = 50, \quad r = 0.04,$$

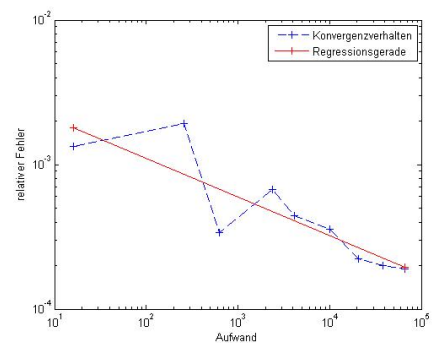
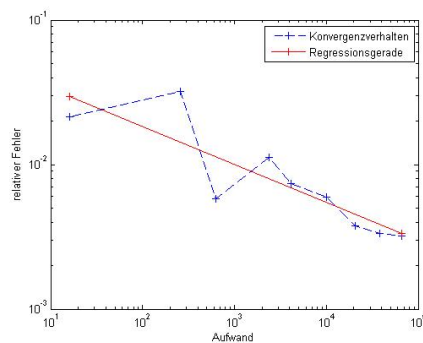
$$\sigma_1 = 0.2, \quad \sigma_2 = 0.2, \quad \sigma_3 = 0.2,$$

$$\varrho_{12} = \varrho_{21} = 0.25, \quad \varrho_{13} = \varrho_{31} = 0.25, \quad \varrho_{23} = \varrho_{32} = 0.25, \quad T = 1 .$$

Call

Put

Geometrisches  
Mittel



Arithmetisches  
Mittel

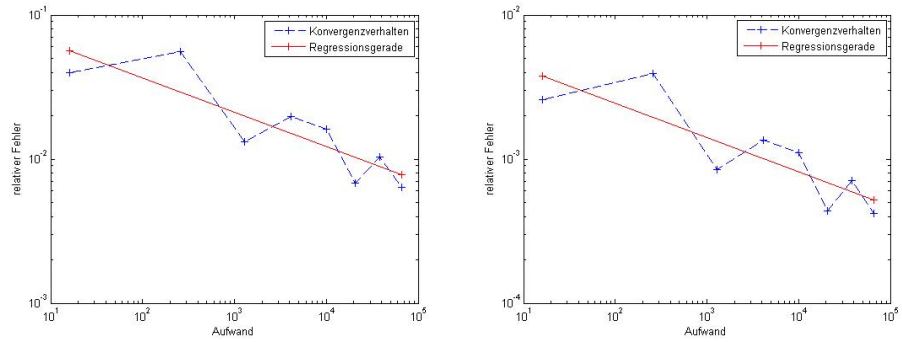


Abbildung 5.2.3: Konvergenzverhalten des Produktbinomialmodells für  $d = 3$

Nach Satz 4.3.3 beträgt für  $d = 3$  die Konvergenzordnung des Verfahrens  $\frac{1}{4}$ . Die Regressionsgerade für den geometrischen Basket hat eine Steigung von  $-0.26284336075$  bei der Call-Option und  $-0.26724510369$  für die Put-Option. Die Call-Option des arithmetischen Baskets hat eine Regressionsgerade mit der Steigung  $-0.23839474319$ . Die Steigung bei der Put-Option beträgt  $-0.23768744885$ .

### 5.3 Konvergenzverhalten für amerikanische Optionen

In diesem Abschnitt wird das Produktbinomialverfahren für amerikanische Optionen mit geometrischem und arithmetischem Basket für zwei Aktien ( $d = 2$ ) betrachtet. Dazu wird jeweils eine Tabelle angegeben, in welcher die Optionspreise der zubetrachtenden Perioden und die Differenzen aufeinanderfolgender Preise stehen. An den angegebenen Differenzen kann man die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens beobachten. Die Parameterwahl wird von Abbildung 5.2.1 übernommen.

M	Aufwand	Preis	Differenz aufeinanderfolgender Preise
10	1000	0.468857636537123	
20	8000	0.475182052426787	0.006324415889664
30	27000	0.477157425196446	0.001975372769659
40	64000	0.477855140027908	0.000697714831462
50	125000	0.478195572148757	0.000340432120849
60	216000	0.478353944384426	0.000158372235669

Tabelle 5.3.1: Optionswerte der amerikanischen Call-Option mit geometrischem Basket

M	Aufwand	Preis	Differenz aufeinanderfolgender Preise
10	1000	10.843637168399614	
20	8000	10.850149546397770	0.006512377998156
30	27000	10.852033755240191	0.001884208842421
40	64000	10.852694045932559	0.000660290692368
50	125000	10.853041393694836	0.000347347762277
60	216000	10.853179052155948	0.000137658461112

Tabelle 5.3.2: Optionswerte der amerikanischen Put-Option mit geometrischem Basket

M	Aufwand	Preis	Differenz aufeinanderfolgender Preise
10	1000	40.000772013747294	
20	8000	40.001350549114967	0.000578535367672828
30	27000	40.001523843281028	0.000173294166060600
40	64000	40.001640219256643	0.000116375975615313
50	125000	40.001698632723240	0.000058413466597074
60	216000	40.001742415383788	0.000043782660547720

Tabelle 5.3.3: Optionswerte der amerikanischen Call-Option mit arithmetischem Basket

M	Aufwand	Preis	Differenz aufeinanderfolgender Preise
10	1000	0.001128377341219	
20	8000	0.001582670387325	0.000454293046106505
30	27000	0.001693137449992	0.000110467062666997
40	64000	0.001774458779772	0.000081321329779638
50	125000	0.001809907249313	0.000035448469540543
60	216000	0.001837735927138	0.000027828677825538

Tabelle 5.3.4: Optionswerte der amerikanischen Put-Option mit arithmetischem Basket

## 6 Schlusswort

Ziel dieser Arbeit war die Bestimmung eines numerischen Verfahrens, mit dem man europäische und amerikanische Multiasset-Optionen bewerten kann. Das dabei entwickelte Produktbinomialverfahren ist eine Erweiterung des weitverbreiteten Binomialmodells, jedoch benötigt man hier drei statt zwei Bäume und diese haben eine Dimension von  $d$ . Dazu wurde nach einer kurzen Einführung in die Grundlagen der Optionsbewertung zunächst das Binomialverfahren nach Cox-Ross-Rubinstein in Kapitel 3 hergeleitet. Besondere Beachtung galt dabei der Konstruktion der Binomialbäume, der Bestimmung der Parameter und der zwei Phasen des Verfahrens. In Abschnitt 3.4 wurde gezeigt, dass das Binomialmodell gegen das Black-Scholes-Modell konvergiert, jedoch ist der Aufwand dabei quadratisch. Durch die Erweiterung der Dimension im Binomialmodell konnte dann in Kapitel 4 das Produktbinomialmodell entwickelt werden. Die dabei entstehenden mehrdimensionalen Binomialbäume sind das Tensorprodukt von eindimensionalen Bäumen. Der wesentliche Unterschied zum Vorgehen des Binomialmodells ist, dass hier keine direkte Approximation der zugrundeliegenden Aktienkurse vorgenommen wird, sondern zunächst die eindimensionale Verteilung des Wiener-Prozesses durch einen Binomialbaum erstellt wird. Die Erweiterung auf  $d$  Dimensionen wurde durch die Tensorproduktbildung dieser eindimensionalen Binomialbäume definiert. Mit diesem  $d$ -dimensionalen Baum des Wiener Prozesses lässt sich der  $d$ -dimensionale Baum der Aktienkurse berechnen. In diesem Kapitel wurde detailliert auf die Konstruktion der mehrdimensionalen Bäume sowie auf die zwei Phasen des Verfahrens eingegangen und gezeigt, dass das Produktbinomialmodell ein graphisch darstellbares Verfahren zur Berechnung von sowohl europäischen als auch amerikanischen Basket-Optionen ist. Es konvergiert mit der Konvergenzordnung von  $\frac{1}{d+1}$  gegen das mehrdimensionale Black-Scholes-Modell, welches auch die numerischen Ergebnisse untermauert. Der Aufwand für einen möglichst genauen Optionswert ist jedoch ziemlich hoch, da dieses Verfahren unter dem Fluch der Dimension leidet, wie in Lemma 4.3.1 bewiesen wurde. Deshalb ist dieses nur für Optionen geeignet, die von wenigen Wertpapieren abhängen.

Wie schon in der Einleitung angedeutet ist eine Möglichkeit das Produktbinomialmodell zu optimieren die Erweiterung des Verfahrens durch Dünne Gitter. Die Idee basiert auf der wissenschaftlichen Publikation [Smo63] von Sergey Smolyak aus dem Jahr 1963. Das dabei entstehende Dünngitter-Verfahren berücksichtigt nur ausgewählte Äste des Produktbinomialbaumes, deren Optionspreise mit Hilfe der Kombinationstechnik aus dem Dünngitter-Ansatz kombiniert werden. Diese Erweiterung führt zu einer Reduzierung des Rechenaufwandes. Eine andere Möglichkeit wäre die Anwendung des adaptive Verfeinerns

im Baum. Für den Fall einer nicht glatten Payoff-Funktion, würde das adaptive Verfahren gerade in diesem Bereich den Produktbinomialbaum verfeinern und auf diese Weise mit wenig zusätzlichem Aufwand die Genauigkeit erhöhen.



## Literatur

- [Kür08] Kürten, Christina. Dünngitter-Binomialbäume zur Bewertung von Multiasset-Optionen, Diplomarbeit am Institut für Numerische Simulation. Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2008.
- [Ger10] Gerstner, Thomas. Computational Finance, Vorlesungsskript am Institut für Mathematik. Johann Wolfgang Goethe Universität Frankfurt, 2010.
- [Kloe10] Kloeden, Peter. Numerik stochastischer Differentialgleichungen, Vorlesungsskript am Institut für Mathematik. Johann Wolfgang Goethe Universität Frankfurt, 2010.
- [Weth10] Weth, Tobias. Analysis, Vorlesungsskript am Institut für Mathematik. Johann Wolfgang Goethe Universität Frankfurt, 2010.
- [GJ10] Günter, Michael und Jünger, Ansgar. Finanzderivate mit MATLAB. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2010.
- [Kwo98] Kwok, Yue-Kuen. Mathematical Models of Financial Derivates. Springer-Verlag, Sinagpore, 1998.
- [Gla03] Glasserman, Paul. Monte Carlo Methods in Financial Engineering. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [Jia05] Jiang, Lishang. Mathematical modeling and methods of option pricing. World Scientific Publishing Company, Sinagpore, 2005.
- [Omb88] Omberg, Edward. On the theory of perfect hedging. Santa Clara University, 1988.
- [Smo63] Smolyak, Sergey. Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions. Moscow State University, 1963.

# Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich diese Bachelorarbeit mit dem

Titel:

**Ein Produktbinomialverfahren zur Bewertung**

**von Multiasset-Optionen**

selbständig angefertigt, keine anderen Hilfsmittel als die im Quellen- und Literaturverzeichnis genannten benutzt und alle aus den Quellen und der Literatur wörtlich oder sinngemäß übernommenen Stellen als solche gekennzeichnet habe.

Frankfurt am Main, den 19. September 2011

-----

Annkathrin Brauer