Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Modellierung und Simulation II

(Praktikum SIM2, SoSe 2017)

M. Breit, Dr. A. Vogel

Blatt 3 (Abgabe: Mo., 22.5.2016, 10h)

Auf diesem Blatt werden Sie das CG-Verfahren implementieren. Sie machen sich mit den Eigenschaften des Verfahrens vertraut und lernen die Möglichkeit der Vorkonditionierung kennen.

Aufgabe 1 (CG-Verfahren, 8 Punkte)
Implementieren Sie eine Klasse `CG`, die das Verfahren der konjugierten Gradienten zu einer Matrix $\mathbf{A}$ durchführt, um mit deren Hilfe lineare Gleichungssysteme $\mathbf{Au} = \mathbf{b}$ zu lösen. Orientieren Sie sich bei dem Interface an der bereits implementierten Löserklasse `IterativeSolver`. Sehen Sie auch eine Möglichkeit der Vorkonditionierung mit Iterationsverfahren vor, die das Interface `IPreconditioner` erfüllen.

Aufgabe 2 (Symmetrisches Gauß-Seidel-Verfahren, 4 Punkte)
Implementieren Sie das symmetrische Gauß-Seidel-Verfahren in einer Klasse `SymmetricGaussSeidel`. Die Implementierung soll dabei analog zu den Iterationsverfahren der vorherigen Übungszettel (`Jacobi`, `GaussSeidel`) sein, d.h. vom gemeinsamen Interface `IPreconditioner` ableiten.

Aufgabe 3 (Symmetrische Diskretisierung, 4 Punkte)
Die Poisson-Gleichung mit Quellterm $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und Dirichlet-Randwerten $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} -\Delta u(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}), \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}) \quad \text{für } \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

lässt sich mittels dem Finite-Differenzen-Verfahren diskretisieren. Auf einem äquidistanten Gitter sind dabei die Matrixkopplungen im Inneren des Gebiets durch diese Diskretisierung symmetrisch. Um die Randbedingungen zu berücksichtigen, wird üblicherweise eine *Einheitszeile* für die Randpunkte gesetzt – d.h. eine Zeile bestehend aus nur einer Eins (für den entsprechenden Freiheitsgrad) und sonst Nullen – und der Randwert in der rechten Seite des

Gleichungssystems gesetzt. Dadurch ist explizit sichergestellt, dass die Lösung den Randwert exakt erfüllen muss. Jedoch wird so die Symmetrie der zugehören Matrix zerstört.
Implementieren Sie eine symmetrische Diskretisierung der Randwerte, indem Sie zusätzlich zu den Einheitszeilen ebenfalls die Spalten der zugehörigen Rand-Freiheitsgrade eliminieren. Beachten Sie, dass Sie dabei jedoch nicht einfach die Werte auf Null setzen können, sondern die entsprechenden Werte in die rechte Seite des Gleichungssystems bringen müssen.

Beispiel: Die Knotenpositionen seien gegeben durch $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ und Sie haben bei unsymmetrischer Diskretisierung das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & & \dots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\mathbf{x}_1) \\ f(\mathbf{x}_2) \\ f(\mathbf{x}_3) \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

Dann lässt sich dies in das folgende äquivalente System überführen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & & \dots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\mathbf{x}_1) \\ f(\mathbf{x}_2) + g(\mathbf{x}_1) \\ f(\mathbf{x}_3) \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (Lösen der Poisson-Gleichung, 4 Punkte)
Lösen Sie - analog zum vorherigen Übungsblatt - die folgende 2d-Poissongleichung auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0,1) \times (0,1)$

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 4 \quad \text{auf } \Omega, \\ u &= 2 - x^2 - y^2 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2}$$

Diesmal sollen Sie die folgenden Kombinationen an Lösern verwenden:

(a) Vergleichen Sie die Iterationszahlen von Jacobi-, Gauß-Seidel-, und symmetrischem Gauß-Seidel-Verfahren. (20 Knoten in beide Dimensionen; zufällige Startlösung) Sehen Sie einen essentiellen Vorteil des symmetrischen Verfahrens?

(b) Versuchen Sie mittels des CG-Verfahrens obige Differentialgleichung

(i) bei unsymmetrischer Diskretisierung der Randwerte,

(ii) bei symmetrischer Diskretisierung der Randwerte,

zu lösen. Was stellen Sie fest?

(c) Verwenden Sie nun ausschließlich die symmetrische Diskretisierung. Lösen Sie diese mittels des CG-Verfahrens mit Vorkonditionierung mit

(i) dem Jacobi-Verfahren,

(ii) dem Gauß-Seidel-Verfahren,

(iii) dem symmetrischen Gauß-Seidel-Verfahren.

Wie verhalten sich die Iterationszahlen? Welche der Verfahren konvergieren? Erklären Sie Ihre Beobachtung.

Abgabe: Senden Sie Ihren Code sowie sonstige Antworten als Text, PDF oder Scans bitte per E-Mail an `practical.sim2@gcsc.uni-frankfurt.de`. An diese Adresse können Sie sich auch bei Fragen zu den Aufgaben wenden.