Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

# Modellierung und Simulation II

(Praktikum SIM2, SoSe 2017)

M. Breit, Dr. A. Vogel

## Blatt 2 (Abgabe: Mo., 15.5.2016, 10h)

Auf diesem Blatt werden Sie verschiedene einfache Löser implementieren und mit diesen eine Poisson-Gleichung lösen.

**Aufgabe 1** (LU-Zerlegung, 6 Punkte)
Implementieren Sie eine Klasse `LUSolver`, die die LU-Zerlegung einer Matrix A durchführt und mit deren Hilfe lineare Gleichungssysteme mit A löst. Speichern Sie die Dreiecksmatrizen L und U in einer einzigen gemeinsamen Matrix (ohne die Diagonaleinträge von L, welche allesamt 1 sind), die eine Member-Variable der Klasse ist.

**Aufgabe 2** (Iterative Löser, 8 Punkte)
Implementieren Sie

(a) das Jacobi-Verfahren in einer Klasse `Jacobi`,

(b) das Gauß-Seidel-Verfahren in einer Klasse `GaussSeidel`.

**Hinweis:** Beide Verfahren lassen sich als Iteration der Form

$$d_i = Ax_i - b \qquad \text{(Defekt)} \qquad (1)$$
$$c_i = M^{-1}d_i \qquad \text{(Korrektur)} \qquad (2)$$
$$x_{i+1} = x_i - c_i \qquad \text{(Lösungsupdate)} \qquad (3)$$

darstellen, wobei die Matrix $M$ im Falle der Jacobi-Iteration die Diagonale von $A$ ist, im Falle der Gauß-Seidel-Iteration die Diagonale plus die linke untere Dreiecksmatrix.
Schreiben Sie daher zunächst eine Klasse `IterativeSolver`, die dieses iterative Lösungsverfahren umsetzt. Die Klassen `Jacobi` und `GaussSeidel` leiten Sie von einem gemeinsamen Interface `IPreconditioner` ab und statten `IterativeSolver` mit einem Setter für einen Pointer auf ein Objekt von

`IPreconditioner` aus, mit dem dann der Korrekturschritt (2) ausgeführt wird. So können Sie `IterativeSolver` sowohl für das Jacobi- als auch für das Gauß-Seidel-Verfahren benutzen.

**Aufgabe 3** (Lösen der Poisson-Gleichung, 6 Punkte)
Lösen Sie die folgende 2d-Poissongleichung auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0,1) \times (0,1)$

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 4 \quad \text{auf } \Omega, \\ u &= 2 - x^2 - y^2 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4}$$

(a) Vergleichen Sie das Jacobi-Verfahren, das Gauss-Seidel-Verfahren und den LU-Löser (Iterationszahlen). Wählen Sie eine Auflösung von 20 Knoten in beide Dimensionen. Beginnen Sie bei den iterativen Methoden mit einer Startlösung mit zufälligen Einträgen aus $(0, 1)$ und setzen Sie sinnvolle Abbruchbedingungen.

(b) Das Gauß-Seidel-Verfahren aus Aufgabenteil (a) soll genauer untersucht werden.

  (i) Geben Sie die analytische Lösung von (4) an.

  (ii) Schreiben Sie eine Funktion, die ein Sampling beliebiger reellwertiger Funktionen von d Veränderlichen auf ein d-dimensionales strukturiertes Gitter durchführt (s. »util.h«). Nutzen Sie diese Funktion, um die Gitterrepräsentation der analytischen Lösung in einem Vektor zu speichern.

  (iii) Exportieren Sie den Fehler(vektor) des Gauß-Seidel-Verfahrens nach 0, 1, 2, 4 und 8 Iterationen ins VTK-Format und visualisieren Sie (Paraview). Beschreiben Sie, was passiert.

**Abgabe:** Senden Sie Ihren Code sowie sonstige Antworten als Text, PDF oder Scans bitte per E-Mail an `practical.sim2@gcsc.uni-frankfurt.de`. An diese Adresse können Sie sich auch bei Fragen zu den Aufgaben wenden.