Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Modellierung und Simulation II

(Praktikum SIM2, SoSe 2017)

M. Breit, Dr. A. Vogel

Blatt 0 (Abgabe: Mo., 1.5.2016, 10h)

Aufgabe 1 (Eigenwerte, Eigenraum, Diagonalisierbarkeit, 9 Punkte)
Bestimmen Sie zu den folgenden Matrizen

(i)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

(iii)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

jeweils

(a) das charakteristische Polynom $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$,

(b) ob $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$ in Linearfaktoren zerfällt,

(c) alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ und deren algebraische Vielfachheit,

(d) für jeden Eigenwert λ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(\mathbf{A};\lambda)$ und die geometrische Vielfachheit,

(e) ob $\mathbf{A}$ diagonalisierbar ist (mit Begründung).

Aufgabe 2 (Eigenwerte von Matrizen, 5 Punkte)
Die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ habe die n Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Zeigen Sie:

(i) Die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^T$ haben dieselben Eigenwerte.

(ii) Die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}^k := \underbrace{\mathbf{A} \cdot \ldots \cdot \mathbf{A}}_{k-\text{mal}}$ sind $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$.

(iii) $\mathbf{A}$ ist invertierbar $\Leftrightarrow$ 0 ist kein Eigenwert von $\mathbf{A}$, d.h. alle $\lambda_i \neq 0$.

(iv) Ist $\mathbf{A}$ invertierbar, dann sind $\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}$ die Eigenwerte von $\mathbf{A}^{-1}$.

Aufgabe 3 (Äquivalenz von Normen im $\mathbb{R}^n$, 6 Punkte)
Zeigen Sie, dass für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_2$$

Hinweis: Sie dürfen die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung verwenden.

Abgabe: Senden Sie Ihre Antworten bitte als Text / PDF / eingescannte Blätter per Email an `practical.sim2@gcsc.uni-frankfurt.de`.