

Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Modelling and Simulation I

(Practical SIM1, WS 2016/17)

M. Hoffer, Dr. S. Reiter, Dr. A. Vogel

Aufgabenblatt 11 (Abgabe: Mo., 6.2.2017, 10h)

Sämtliche Skriptreferenzen beziehen sich auf das Skript
'Skriptum: Modellierung und Simulation 1 (Prof. Queisser, WS 15/16)'.

Aufgabe 1 (Galerkin-Verfahren, 10 Bonus Punkte)

Sei $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^n$. Gegeben sei das Poissonproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, & \text{in } \Omega, \\ u &= 0, & \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

- (a) Formulieren Sie das Problem als Variationsproblem.
- (b) Ω werde durch eine regelmäßige Triangulierung in Dreiecke zerlegt, d.h. wie in Abb. 5.2. im Skriptum. Dann wird zur diskreten Lösung des Variationsproblems aus (a) der Ansatz- und Testraum V der stetigen und auf jedem Dreieck der Triangulierung linearen Funktionen gewählt. Formulieren Sie das durch das Finite-Elemente-Verfahren resultierende Gleichungssystem (für innere Knoten) unter Angabe der Matrix und der rechten Seite.
- (c) Wie sieht das Gleichungssystem für den Raum der stetigen und elementweise quadratischen Ansatz- und Testfunktionen aus?

Aufgabe 2 (Wiederholung zu Finiten-Differenzen, 0P)

- Nennen Sie drei Arten, eine erste Ableitung zu diskretisieren! Wie verhält sich jeweils der Fehler?
- Wie approximiert man $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$? Wie verhält sich der Fehler?
- Geben Sie die Stern-Notation von Δu an.
- Wie diskretisiert man den Dirichlet- bzw. den Neumann-Rand?
- Geben Sie die Definition „A ist M-Matrix“ an. Geben sie auch ein nützliches hinreichendes Kriterium dafür an.
- Was ist die Definition und was bedeutet es, wenn eine Matrix dünnbesetzt ist?
- Formulieren Sie die instationäre Diffusiongleichung?
- Gegeben sei ein strukturiertes 1002x1002-Gitter analog zur Abb. 4.4. im Skript. Auf diesem Gitter wird die Laplace-Gleichung mit Dirichlet-Rändern diskretisiert. Welche Dimension hat die resultierende Matrix A ? Wieviele Nicht-Null-Einträge hat die Matrix A ? Wieviele hat A^{-1} ?
- Was ist $\|\cdot\|_\infty$ für Matrizen und was heißt „A ist positiv definit“?
- Was sagt das Kriterium von Gershgorin aus, und wozu braucht man es?
- Was besagt das Maximumsprinzip?
- Zeigen Sie, dass die Diskretisierung der Poisson-Gleichung mit Dirichlet-Randwerten eine M-Matrix produziert.
- Erläutern Sie die Begriffe Stabilität, Konsistenz und Konvergenz im Zusammenhang mit der Finiten-Differenzen-Diskretisierung. Welche Eigenschaften erfüllt die Fünfpunktstern-Diskretisierung?

Aufgabe 3 (Wiederholung zu Finiten-Elementen, 0P)

- Was ist eine Norm? Was ist ein normierter Raum? Was ist ein Banach-Raum? Was bedeutet Vollständigkeit?
- Wie ist der Raum der quadratintegriblen Funktionen definiert?
- Was ist ein Sobolev-Raum?
- Was ist ein Hilbert-Raum?
- Wie ist schwache Differenzierbarkeit definiert? In welcher Beziehung steht sie zur klassischen Differenzierbarkeit?
- Erläutern Sie die Idee hinter der Variationsformulierung für ein Modellproblem! Wie sieht die Variationsformulierung formal aus?
- Erklären Sie in eigenen Worten (im Sinne einer einfachen Herleitung) den Übergang vom Variationsproblem zum Galerkinverfahren, d.h. von einem ∞ -dimensionalen Problem zu einem endlich-dimensionalen Problem.
- Erklären sie in eigenen Worten
 - den Satz von Lax-Milgram,
 - das Lemma von Céa,
 - den Charakterisierungssatz,
 und deren Bedeutung für die Finiten Elemente.
- Wie wählt man die Basisfunktionen der Finiten Elemente?
- Erklären Sie den Unterschied zwischen den beiden Diskretisierungsarten FD, FE und nennen Sie jeweils Vor- und Nachteile.