Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Modelling and Simulation I

(Practical SIM1, WS 2016/17)

M. Hoffer, Dr. S. Reiter, Dr. A. Vogel

Aufgabenblatt 10 (Abgabe: Mo., 30.1.2016, 10h)

Bitte beachten Sie die Hinweise zur Installation von **ug4** auf der Vorlesungs-homepage.
Für Hinweise im Umgang mit der Skriptsprache *Lua* beachten Sie bitte das nach der Installation von 'Examples' auf Ihrem Rechner verfügbare Skript `ug4/apps/Examples/lua-programming.lua`.

Hinweis: Um Konflikte mit der Versionskontrolle zu vermeiden, sollten Sie heruntergeladene Skripte zunächst kopieren und dann die kopierte Version editieren. Für jede Aufgabe sollten Sie dabei ein separates Skript erstellen. Sollte es bei Aktualisierungen zu Problemen kommen, können Sie die problematischen Skripte löschen und nochmals aktualisieren. Stellen Sie dann sicher, zuvor eine Sicherheitskopie des betroffenen Skripts erstellt zu haben.

Bitte aktualisieren Sie Ihre ug4 Version vor dem Bearbeiten der Aufgaben, indem Sie in Ihrem ug4 Ordner oder einem Unterordner folgendes ausführen:

ughub gitpull

Bitte schicken Sie erstellte Skripte, Bilder und Ausgaben an

`practical.sim1@gcsc.uni-frankfurt.de`

Sowohl Ausgaben aus Programmläufen, modifizierte Skripte, Visualisierungen sowie geschriebener C++ Quellcode sollen Teil Ihrer Abgabe sein.

Aufgabe 1 (Vektordifferenz, 4P)
In einem ug4-Plugin soll die Vektordifferenz implementiert werden. Nutzen Sie dazu das DemoPlugin aus dem vorhergehenden Übungsblatt und erweitern dieses um die Funktion

```
void VecDifference (vector_type& c, vector_type& a, vector_type& b);
```

Implementieren und registrieren Sie diese Funktion. Dabei soll

$$\texttt{VecDifference}(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$$

die Vektordifferenz

$$\mathbf{c} := \mathbf{a} - \mathbf{b}, \qquad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n,$$

berechnen.

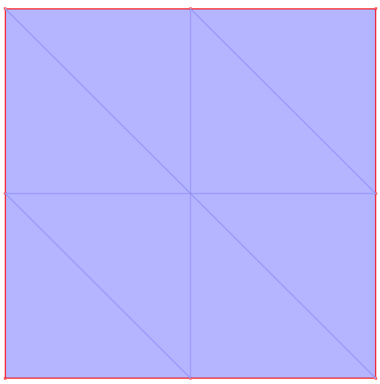
Aufgabe 2 (Konvergenzordnung, 10P)
Betrachten Sie das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega = (0,1) \times (0,1), \\ u &= \varphi && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} f(x,y) &:= (2\pi)^2 \cdot (\sin(2\pi x) + \sin(2\pi y)), \\ \varphi(x,y) &:= \sin(2\pi x) + \sin(2\pi y). \end{aligned}$$

Unter Verwendung von ug4 und ProMesh können Sie dieses Problem approximativ auf einem $(N+1) \times (N+1)$ Gitter Ω_h mit Gitterweite $h := \frac{1}{N}$ lösen. Dazu soll ein Dreiecksgitter der Struktur



verwendet werden. Durch die Wahl dieses Gitters ist das diskrete Gleichungssystem als üblicher 5-Punkt-Stern wie bei Finiten Differenzen gegeben.

Aufgaben:

(a) Wie lautet die exakte kontinuierliche Lösung $u : \Omega \to \mathbb{R}$ des Problems?

(b) Die kontinuierliche Lösung lässt sich auf das Gitter restringieren, indem $R_h u(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x})$ für alle Gitterpunkte $\mathbf{x} \in \Omega_h$ gewählt wird. Nun lässt sich der Unterschied zwischen exakter Lösung u und approximativer Lösung u_h in verschiedenen Normen bei unterschiedlicher Gitterfeinheit vergleichen. Zudem lässt sich damit auch der Fehler unter Gitterverfeinerung zwischen einem Gittern mit Gitterweite h und dem gröberen Gitter mit Weite $2h$ vergleichen.

Nutzen Sie Ihre Implementierung von `VecDifference` (und die Funktionen `Interpolate`, `VecNormSup`, `VecNorm2` aus den vorherigen Übungen), um die Werte in folgender Tabelle zu berechnen:

h	$\|R_h u - u_h\|_\infty$	$\frac{\|R_{2h}u-u_{2h}\|_\infty}{\|R_h u-u_h\|_\infty}$	$\|R_h u - u_h\|_2$	$\frac{\|R_{2h}u-u_{2h}\|_2}{\|R_h u-u_h\|_2}$
1/8		—		—
1/16				
1/32				
1/64				
1/128				

(c) Tragen Sie die Fehler $\|R_h u - u_h\|_\infty$ und $\|R_h u - u_h\|_2$ über h unter Verwendung von logarithmischer Skalierung auf. Welche Kurven erhalten Sie und warum ist dies zu erwarten?

(d) Wie lässt sich aus der Tabelle die Konvergenzrate (d.h. die Rate p, wenn der Fehler sich wie $\mathcal{O}(h^p)$ verhält) schätzen? Wie groß ist - gemäß der berechneten Werte in Ihrer Tabelle - die (geschätzte) Konvergenzrate in der 2-Norm und der ∞-Norm? Warum ist dieses Ergebnis zu erwarten?

(e) Aus der Vorlesung: Geben Sie eine theoretische Abschätzung für den Fehler $\|R_h u - u_h\|_\infty$ auf einem Gitter mit $h = \frac{1}{32}$ an. Sind die von Ihren bestimmten Werte in Übereinstimmung mit dieser Abschätzung?

Aufgabe 3 (Einspringende Ecke, 6P)
Erinnern Sie sich an die Polarkoordinaten für Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ in der Ebene

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

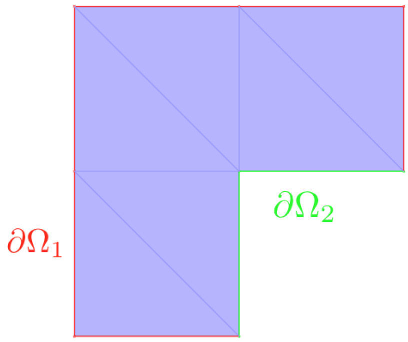
mit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{und} \qquad \theta \in [0, 2\pi).$$

Betrachten Sie das Gebiet

$$\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \setminus [0, 1] \times [-1, 0],$$

d. h. aus dem Quadrat mit Seitenlänge 2 wurde die Ecke unten rechts herausgenommen:



Betrachten Sie auf diesem Gebiet das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u &= r^{\frac{2}{3}} \sin(\frac{2}{3}\theta) && \text{auf } \partial\Omega_1, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_2. \end{aligned}$$

Aufgaben:

(a) Wie lautet die exakte kontinuierliche Lösung $u : \Omega \to \mathbb{R}$ des Problems?

(b) Ermitteln Sie analog zur vorhergehenden Aufgabe die Werte in folgender Tabelle:

h	$\|R_h u - u_h\|_\infty$	$\frac{\|R_{2h} u - u_{2h}\|_\infty}{\|R_h u - u_h\|_\infty}$	$\|R_h u - u_h\|_2$	$\frac{\|R_{2h} u - u_{2h}\|_2}{\|R_h u - u_h\|_2}$
$1/8$		—		—
$1/16$				
$1/32$				
$1/64$				
$1/128$				

(c) Wie groß ist die (geschätzte) Konvergenzrate in der 2-Norm und der ∞-Norm? Begründen Sie, warum Sie nicht die Konvergenzraten aus der vorhergehenden Aufgabe erwarten können und wie dieses Verhalten mit der Theorie aus der Vorlesung zusammenpasst?

Hinweis: Die Polarkoordinaten können Sie in Lua folgendermaßen implementieren

```lua
-- polar coords with theta in [0, 2pi)
local r = math.sqrt(x*x + y*y)
local theta = 0;
if not(r == 0) and y > 0 then theta = math.acos(x/r) end
if not(r == 0) and y < 0 then theta = 2*math.pi - math.acos(x/r) end
```