Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Mathematik für Studierende der Bioinformatik 2

(Übung zu B-MBI-2, Sommersemester 2016)

Dr. A. Vogel, Prof. Dr. G. Wittum

Aufgabenblatt 11 (Abgabe: Di., 5.7., 12:15h)

Aufgabe 1 (Stetigkeit von Komponentenfunktionen, 4 Punkte)
Bestimmen Sie, ob die folgenden Funktionen stetig sind und begründen Sie Ihre Antwort:

(i)
$$\mathbf{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\qquad \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}x_1^2+x_2^2+x_2x_1\\ \sin(x_1)\end{pmatrix},$$

(ii)
$$\mathbf{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\qquad \mathbf{x}\mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x})=\begin{cases}\mathbf{x}, & \text{für } x_1>0,\\ -\mathbf{x}, & \text{für } x_1\le 0,\end{cases}$$

(iii)
$$\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\qquad x\mapsto \begin{pmatrix}e^x\\ |x|\\ x^3\end{pmatrix},$$

(iv)
$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\qquad \mathbf{x}\mapsto f(\mathbf{x})=\begin{cases}\frac{x_2}{x_1}, & \text{für } x_1\neq 0,\\ 0, & \text{für } x_1=0.\end{cases}$$

Hinweis: Für Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dürfen Sie die Bestimmung der Stetigkeit als bekannt voraussetzen und müssen dies nicht explizit zeigen.

Aufgabe 2 (Gradient, 3 Punkte)
Bestimmen Sie den Gradient $\nabla f(\mathbf{x})$ der folgenden Funktionen:

(i) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(\mathbf{x})=3x_1^4+2x_1x_2-6x_1x_2^2$,

(ii) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = e^{-\|\mathbf{x}\|^2}$,

(mit der euklidischen Norm $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$).

Aufgabe 3 (Divergenz, 2 Punkte)
Bestimmen Sie die Divergenz $\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})$ der folgenden Vektorfelder:

(i) $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_2^3 + x_1 x_2 \end{pmatrix}$,

(ii) $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Aufgabe 4 (Jacobi-Matrix, 2 Punkte)
Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $\mathbf{J_f}(\mathbf{x})$ der Funktion

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2 + x_3^3 + x_1 x_2 x_3 \\ e^{2x_1 + 4x_2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (Laplace-Operator, 4 Punkte)
Bestimmen Sie die Anwendung des Laplace-Operators $\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x})$ auf die folgenden Funktionen:

(i) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$,

(ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,

jeweils mit der euklidischen Norm $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

Aufgabe 6 (Rechenregel für Gradient, 1 Punkt)
Seien $f, g : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Zeigen Sie:

$$\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g.$$

Hinweis: Sie dürfen die Kettenregel für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als bekannt voraussetzen.

Aufgabe 7 (Partiell differenzierbar $\not\Rightarrow$ total differenzierbar, 4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben als

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0, & \text{für } (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen.

(ii) Bestimmen Sie, ob f an der Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ stetig ist.

(iii) Ist f an der Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (total) differenzierbar?

(iv) Sind die partiellen Ableitungen an der Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ stetig?