Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Mathematik für Studierende der Bioinformatik 2

(Übung zu B-MBI-2, Sommersemester 2016)

Dr. A. Vogel, Prof. Dr. G. Wittum

Aufgabenblatt 7 (Abgabe: Di., 7.6., 12:15h)

Aufgabe 1 (Laplacescher Entwicklungssatz, 4 Punkte)
Berechnen Sie mit Hilfe des Entwicklungssatzes von Laplace und der Entwicklung **nach Zeilen** die Determinante der folgenden Matrizen:

(i) Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

(iii)

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(iv)

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (Cramersche Regel, 2 Punkte)
Bestimmen Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel die Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{b}.$$

Aufgabe 3 (Komplementäre Matrix, 4 Punkte)
Bestimmen Sie zu der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die komplementäre Matrix $\mathbf{A}^{\#}$ und bestimmen Sie mit Hilfe der komplementären Matrix die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$.

Aufgabe 4 (Produktregel für Blockmatrizen, 2 Punkte)
Sei eine Blockmatrix der Form

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{D}$ gegeben. Zeigen Sie, dass gilt

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{D}.$$

Aufgabe 5 (Aufwand zur Berechnung einer Determinanten, 8 Punkte)
Zur Berechnung der Determinanten $\det \mathbf{A}$ einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ können verschiedene Verfahren eingesetzt werden, die sich in der Anzahl der benötigten Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) unterscheiden. Betrachten Sie daher in Abhängigkeit der Größe der Matrix $n \in \mathbb{N}$ die Anzahlen

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(n) &:= \text{Anzahl Additionen und Subtraktionen,} \\ \mathrm{M}(n) &:= \text{Anzahl Multiplikationen und Divisionen,} \\ \mathrm{Op}(n) := \mathrm{A}(n) + \mathrm{M}(n) &:= \text{Anzahl arithmetische Operationen,} \end{aligned}$$

die bei der Durchführung einer Berechnung benötigt werden. Nehmen Sie dabei an, dass die Matrix komplett gefüllt ist (d.h. für alle Einträge gilt $a_{ij} \neq 0$, $1 \leq i,j \leq n$) und ignorieren Sie den Aufwand zur Berechnung von Vorzeichen (Speziell: im Verfahren von Gauß wird der Aufwand zum Mitzählen der Zeilenvertauschungen vernachlässigt; bei Verfahren von Laplace wird die Auswertung und Multiplikation des Terms $(-1)^{i+j}$ vernachlässigt).

(i) Bestimmen Sie für den Gauß-Algorithmus zur Umformung auf Zeilenstufenform und Multiplikation der Diagonalelemente eine explizite Formel für $\mathrm{A}(n), \mathrm{M}(n)$ und $\mathrm{Op}(n)$.

(ii) Bestimmen Sie für den Laplaceschen Entwicklungssatz

(a) eine rekursive Formel für $\mathrm{A}(n), \mathrm{M}(n)$ und $\mathrm{Op}(n)$,

(b) eine explizite Formel für $\mathrm{A}(n), \mathrm{M}(n)$ und $\mathrm{Op}(n)$.

(iii) Die Anzahl an Fließkommaoperationen, die ein Rechner pro Sekunde verarbeiten kann, wird in FLOPS angegeben (Floating Point Operations Per Second). Ihr Heimcomputer hat eine Rechenleistung von ca. $1 - 10$ GigaFLOPS $= 1 - 10 \cdot 10^9$ FLOPS.

(a) Wie viele Rechenoperationen benötigen Sie mit den beiden Verfahren für $n = 3$?

(b) Wie viele Rechenoperationen benötigen Sie mit den beiden Verfahren für $n = 19$? Wie lange benötigen Sie auf einem Computer mit $1 \cdot 10^9$ FLOPS für diese Berechnungen? Geben Sie die Werte in Sekunden und Jahren an (1 Jahr $\equiv$ 31557600 Sekunden).

(c) Berechnen Sie, wie viele Operationen das Verfahren von Gauß für $n = 100000$ benötigt und welche Zeit Sie dafür mit einem Heimcomputer mit $1 \cdot 10^9$ FLOPS benötigen.