

Mathematik für Studierende der Bioinformatik 2

(Übung zu B-MBI-2, Sommersemester 2016)

Dr. A. Vogel, Prof. Dr. G. Wittum

Aufgabenblatt 6 (Abgabe: Di., 31.5., 12:15h)

Aufgabe 1 (Diagonalisierung der Matrixdarstellung, 14 Punkte)

Betrachten Sie die Vektorräume

$$V = \{\lambda_1 \cdot (3x^2 + x^3) + \lambda_2 \cdot (x^2 \ln(x)) + \lambda_3 \cdot (x^2 + x^3 \ln(x)) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \{\lambda_1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot \ln(x) + \lambda_4 \cdot x \ln(x) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}\}$$

als Teilmenge der reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[1, \infty]$, d.h. es gilt $V, W \subset \text{Abb}([1, \infty], \mathbb{R})$. Als lineare Abbildung zwischen diesen beiden Räumen sei die zweite Ableitung

$$\Delta : V \rightarrow W, \quad g \mapsto g''$$

definiert. Die aufspannenden Vektoren beider Räume sind linear unabhängig, d.h. sie bilden sogar eine Basis des jeweiligen Raumes:

$$\mathcal{B}_V := (3x^2 + x^3, x^2 \ln(x), x^2 + x^3 \ln(x)),$$

$$\mathcal{B}_W := (1, x, \ln(x), x \ln(x)).$$

(i) Berechnen Sie die Matrixdarstellungsmatrix

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V}(\Delta) \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$$

der linearen Abbildung Δ bzgl. der Basen \mathcal{B}_V und \mathcal{B}_W .

(ii) Bestimmen Sie zwei Matrizen \mathbf{E}, \mathbf{E}' , so dass Sie eine Darstellung

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V}(\Delta) \cdot \mathbf{E}' = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} =: \mathbf{M}_{\tilde{\mathcal{B}}_W, \tilde{\mathcal{B}}_V}(\Delta)$$

mit einer Diagonalmatrix erhalten.

(iii) Bestimmen Sie Transformationsmatrizen

$$\mathbf{T}_{\mathcal{B}_V, \tilde{\mathcal{B}}_V} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad \text{und} \quad \mathbf{T}_{\mathcal{B}_W, \tilde{\mathcal{B}}_W} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

auf Basen $\tilde{\mathcal{B}}_V$ und $\tilde{\mathcal{B}}_W$ bzgl. derer die lineare Abbildung die Darstellung $\mathbf{M}_{\tilde{\mathcal{B}}_W, \tilde{\mathcal{B}}_V}(\Delta)$ aus (ii) besitzt.

(iv) Berechnen Sie die Vektoren der neuen Basen

$$\tilde{\mathcal{B}}_V \quad \text{und} \quad \tilde{\mathcal{B}}_W$$

durch Linearkombination der alten Basisvektoren \mathcal{B}_V und \mathcal{B}_W unter Verwendung von $\mathbf{T}_{\mathcal{B}_V, \tilde{\mathcal{B}}_V}$ und $\mathbf{T}_{\mathcal{B}_W, \tilde{\mathcal{B}}_W}$.

(v) Betrachten Sie das folgende Element von V :

$$g(x) := 6x^2 + 4x^3 - 2x^2 \ln(x) - 6x^3 \ln(x).$$

Stellen Sie $g \in V$ über den kanonischen Basisisomorphismus jeweils bzgl. \mathcal{B}_V und bzgl. $\tilde{\mathcal{B}}_V$ dar, d.h. berechnen Sie

$$\mathbf{x} = \Phi_{\mathcal{B}_V}^{-1}(g) \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{x}} = \Phi_{\tilde{\mathcal{B}}_V}^{-1}(g).$$

(vi) Wenden Sie die lineare Abbildung an und notieren Sie das Ergebnis in Koordinaten bzgl. \mathcal{B}_W und bzgl. $\tilde{\mathcal{B}}_W$, d.h. berechnen Sie

$$\mathbf{r} = \mathbf{M}_{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V}(\Delta) \cdot \mathbf{x} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{M}_{\tilde{\mathcal{B}}_W, \tilde{\mathcal{B}}_V}(\Delta) \cdot \tilde{\mathbf{x}}.$$

(vii) Wie lauten die Elemente von W , die durch \mathbf{r} bzw. $\tilde{\mathbf{r}}$ dargestellt werden, d.h. berechnen Sie

$$\Phi_{\mathcal{B}_W}(\mathbf{r}) \quad \text{und} \quad \Phi_{\tilde{\mathcal{B}}_W}(\tilde{\mathbf{r}}).$$

(viii) Leiten Sie g zweimal ab, d.h. berechnen Sie das Ergebnis von $\Delta(g) \in W$ direkt? Wie unterscheidet sich dieses Ergebnis von denen in (vii)?

Aufgabe 2 (Determinante einer Matrixsumme, 1 Punkt)

Geben Sie zwei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ an, so dass gilt

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \neq \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B}).$$

Aufgabe 3 (Berechnung von Determinanten, 5 Punkte)

Bestimmen Sie mittels des Verfahrens von Gauß die Determinante der folgenden Matrizen:

(i) Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(ii) Für $b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(iii)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

(iv)

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(v)

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$