Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Mathematik für Studierende der Bioinformatik 2

(Übung zu B-MBI-2, Sommersemester 2016)

Dr. A. Vogel, Prof. Dr. G. Wittum

Aufgabenblatt 4 (Abgabe: Di., 17.5., 12:15h)

Aufgabe 1 (Lineare Abbildungen, 12 Punkte)
Zeigen Sie, ob es sich bei den folgenden Abbildungen um lineare Abbildungen handelt.

(i)

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 5 \cdot x + 3$$

(ii)

$$P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

(iii)

$$M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 \cdot x_2$$

(iv)

$$T : \mathbb{R}^{3\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 3}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix}$$

(v) Sei $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner gleich zwei mit komplexen Koeffizienten:

$$Q : \mathbb{C}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{C}[x]_{\leq 2}, \quad a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \mapsto a_2 + (a_0 + a_1) \cdot x$$

(vi) Für $b > 0$ sei $\text{Abb}([0,b],\mathbb{R})$ der Vektorraum der Funktionen, die vom Intervall $[0,b] \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ abbilden:

$$E : \text{Abb}([0,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f\left(\frac{b}{2}\right).$$

Aufgabe 2 (Dualraum, 8 Punkte)
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Nun lässt sich die Menge aller linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{R}$ betrachten, d.h. die Menge

$$V^* := \{L : V \to \mathbb{R} \mid L \text{ ist eine lineare Abbildung}\}.$$

Diese Menge V^* wird als *Dualraum* von V bezeichnet und die Elemente der Menge V^* (d.h. die linearen Abbildungen) heißen *Linearformen* auf V.

(i) Sei $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ der Vektorraum der reellwertigen, stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das Integral

$$\mathcal{I} : V \to \mathbb{R}, \qquad f \mapsto \mathcal{I}(f) := \int_a^b f(x)\,dx$$

eine Linearform auf V ist.

(ii) Sei V ein beliebiger $\mathbb{R}$-Vektorraum und V^* der zugehörige Dualraum. Zeigen Sie, dass der Dualraum V^* mit den Operationen

$$\begin{aligned} + : \quad & V^* \times V^* \to V^*, \\ & (L, M) \mapsto (L + M) \text{ mit } (L + M)(f) := L(f) + M(f) \text{ für alle } f \in V, \\ \cdot : \quad & \mathbb{R} \times V^* \to V^*, \\ & (\lambda, L) \mapsto (\lambda L) \text{ mit } (\lambda L)(f) := \lambda \cdot L(f) \text{ für alle } f \in V, \end{aligned}$$

ein Vektorraum ist.