Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Mathematik für Studierende der Bioinformatik 2

(Übung zu B-MBI-2, Sommersemester 2017)

Dr. K. Xylouris

Aufgabenblatt 7 (Abgabe: Fr., 16.6., 14:15h)

Aufgabe 1 (Orthogonale Matrizen, 3 Punkte)
Bestimmen Sie, welche der folgenden Matrizen orthogonal ist:

$$\text{(i)}\quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii)}\quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{(iii)}\quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (Induzierte Metrik, 3 Punkte)
Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} d(\cdot,\cdot) : V \times V &\to \mathbb{R}, \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\mapsto d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| \end{aligned}$$

eine Metrik ist, indem Sie die Metrikeigenschaften nachweisen.

Aufgabe 3 (Diskrete Metrik, 3 Punkte)
Sei M eine beliebige Menge. Zeigen Sie, dass die Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ 1, & \text{falls } x \neq y, \end{cases}$$

eine Metrik definiert.

Aufgabe 4 (Konvergenz im $\mathbb{R}^n$, 5 Punkte)
Betrachten Sie:

(i) Die Folge $(\mathbf{a}_k)_{k \geq 1}$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\mathbf{a}_k := \begin{pmatrix} 3 + \frac{2}{k} \\ \frac{1+2k}{k} \\ \frac{7-5k}{k} \end{pmatrix}.$$

(ii) Die Folge $(\mathbf{b}_k)_{k\geq 1}$ in $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\mathbf{b}_k := \begin{pmatrix} \frac{k^2-10k}{3k} \\ \frac{5k^2-8}{k^3} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie jeweils, ob die Folge konvergiert und gegebenenfalls den Grenzwert der Folge.

Aufgabe 5 (Offene / Abgeschlossen Mengen, 6 Punkte)
Betrachten Sie die Menge $M = \mathbb{R}^2$ und auf dieser Menge die durch die 1-Norm induzierte Metrik d gegeben durch

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_1 = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \qquad \text{für alle } \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2.$$

Bestimmen Sie für jede der folgenden Teilmengen $U \subset M$, ob sie bzgl. dieser Metrik offen und/oder abgeschlossen ist:

(i)

$$U_1 := \emptyset, \quad U_2 := \mathbb{R}^2,$$

(ii)

$$U_3 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq 0\}, \quad U_4 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0\},$$

(iii)

$$U_5 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0 \text{ und } x_2 \geq 0\}.$$