Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Mathematik für Studierende der Bioinformatik 2

(Übung zu B-MBI-2, Sommersemester 2017)
Dr. K. Xylouris

Aufgabenblatt 5 (Abgabe: Do., 1.6., 15:45h)

Aufgabe 1 (Eigenwerte von Matrizen, 4 Punkte)
Die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ habe die n Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Zeigen Sie:

(i) Die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^T$ haben dieselben Eigenwerte.

(ii) Die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}^k := \underbrace{\mathbf{A} \cdot \ldots \cdot \mathbf{A}}_{k-\text{mal}}$ sind $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$.

(iii) $\mathbf{A}$ ist invertierbar $\Leftrightarrow$ 0 ist kein Eigenwert von $\mathbf{A}$, d.h. alle $\lambda_i \neq 0$.

(iv) Ist $\mathbf{A}$ invertierbar, dann sind $\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}$ die Eigenwerte von $\mathbf{A}^{-1}$.

Aufgabe 2 (Diagonalisierung von Endomorphismen, 7 Punkte)
Seien als Funktionen $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ die trigonometrischen Funktionen Sinus $\sin(x)$ und Kosinus $\cos(x)$ gegeben. Daraus lässt sich die Basis

$$\mathcal{B} = (\sin, \cos, \sin \cdot \cos, \sin^2, \cos^2)$$

des Vektorraums $V := \operatorname{span}(\mathcal{B}) \subset \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bilden. Betrachten Sie auf diesem Raum die zweite Ableitung als Endomorphismus

$$\mathcal{D} : V \to V, \quad g \mapsto g''.$$

(i) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $\mathbf{A} := \mathbf{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\mathcal{D})$.
Hinweis: Die ersten Ableitungen lauten: $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$.

(ii) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $P_{\mathcal{D}}(\lambda)$.

(iii) Zerfällt $P_{\mathcal{D}}(\lambda)$ in Linearfaktoren? Falls ja, bestimmen Sie diese Zerlegung und geben Sie alle Eigenwerte von $\mathcal{D}$ sowie deren algebraische Vielfachheit an.

(iv) Bestimmen Sie eine Basis der Eigenräume von $\mathbf{A}$ für alle Eigenwerte und geben Sie die geometrische Vielfachheit für jeden Eigenwert an.

(v) Sofern es möglich ist, bestimmen Sie eine Matrix $\mathbf{S}$, so dass $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{SAS}^{-1}$ Diagonalgestalt besitzt. Wie lautet $\widetilde{\mathbf{A}}$? Falls dies nicht möglich ist, begründen Sie, warum dies nicht geht.

(vi) Geben Sie eine Basis $\widetilde{\mathcal{B}}$ von V an bzgl. deren die darstellenden Matrix $\mathbf{M}_{\widetilde{\mathcal{B}},\widetilde{\mathcal{B}}}(\mathcal{D})$ Diagonalgestalt besitzt, sofern dies möglich ist. Wie lautet die zweite Ableitung (d.h. die Anwendung von $\mathcal{D}$) der neuen Basisvektoren?