Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Mathematik für Studierende der Bioinformatik 2

(Übung zu B-MBI-2, Sommersemester 2017)

Dr. K. Xylouris

Aufgabenblatt 4 (Abgabe: Do., 25.5., 15:45h)

Aufgabe 1 (Cramersche Regel, 2 Punkte)
Bestimmen Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel die Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{b}.$$

Aufgabe 2 (Komplementäre Matrix, 4 Punkte)
Bestimmen Sie zu der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die komplementäre Matrix $\mathbf{A}^{\#}$ und bestimmen Sie mit Hilfe der komplementären Matrix die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$.

Aufgabe 3 (Produktregel für Blockmatrizen, 2 Punkte)
Sei eine Blockmatrix der Form

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{D}$ gegeben. Zeigen Sie, dass gilt

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{D}.$$

Aufgabe 4 (Aufwand zur Berechnung einer Determinanten, 8 Punkte)
Zur Berechnung der Determinanten $\det \mathbf{A}$ einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ können verschiedene Verfahren eingesetzt werden, die sich in der Anzahl der benötigten Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division)

unterscheiden. Betrachten Sie daher in Abhängigkeit der Größe der Matrix $n \in \mathbb{N}$ die Anzahlen

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(n) &:= \text{Anzahl Additionen und Subtraktionen}, \\ \mathrm{M}(n) &:= \text{Anzahl Multiplikationen und Divisionen}, \\ \mathrm{Op}(n) := \mathrm{A}(n) + \mathrm{M}(n) &:= \text{Anzahl arithmetische Operationen}, \end{aligned}$$

die bei der Durchführung einer Berechnung benötigt werden. Nehmen Sie dabei an, dass die Matrix komplett gefüllt ist (d.h. für alle Einträge gilt $a_{ij} \neq 0$, $1 \leq i, j \leq n$) und ignorieren Sie den Aufwand zur Berechnung von Vorzeichen (Speziell: im Verfahren von Gauß wird der Aufwand zum Mitzählen der Zeilenvertauschungen vernachlässigt; bei Verfahren von Laplace wird die Auswertung und Multiplikation des Terms $(-1)^{i+j}$ vernachlässigt).

(i) Bestimmen Sie für den Gauß-Algorithmus zur Umformung auf Zeilenstufenform und Multiplikation der Diagonalelemente eine explizite Formel für $\mathrm{A}(n), \mathrm{M}(n)$ und $\mathrm{Op}(n)$.

(ii) Bestimmen Sie für den Laplaceschen Entwicklungssatz

   (a) eine rekursive Formel für $\mathrm{A}(n), \mathrm{M}(n)$ und $\mathrm{Op}(n)$,

   (b) eine explizite Formel für $\mathrm{A}(n), \mathrm{M}(n)$ und $\mathrm{Op}(n)$.

(iii) Die Anzahl an Fließkommaoperationen, die ein Rechner pro Sekunde verarbeiten kann, wird in FLOPS angegeben (Floating Point Operations Per Second). Ihr Heimcomputer hat eine Rechenleistung von ca. $1 - 10$ GigaFLOPS $= 1 - 10 \cdot 10^9$ FLOPS.

   (a) Wie viele Rechenoperationen benötigen Sie mit den beiden Verfahren für $n = 3$?

   (b) Wie viele Rechenoperationen benötigen Sie mit den beiden Verfahren für $n = 19$? Wie lange benötigen Sie auf einem Computer mit $1 \cdot 10^9$ FLOPS für diese Berechnungen? Geben Sie die Werte in Sekunden und Jahren an (1 Jahr $\equiv$ 31557600 Sekunden).

   (c) Berechnen Sie, wie viele Operationen das Verfahren von Gauß für $n = 100000$ benötigt und welche Zeit Sie dafür mit einem Heimcomputer mit $1 \cdot 10^9$ FLOPS benötigen.

Aufgabe 5 (Eigenwerte, Eigenraum, Diagonalisierbarkeit, 9 Punkte)
Bestimmen Sie zu den folgenden Matrizen

(i)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

(iii)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

jeweils

(a) das charakteristische Polynom $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$,

(b) ob $P_{\mathbf{A}}(\lambda)$ in Linearfaktoren zerfällt,

(c) alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ und deren algebraische Vielfachheit,

(d) für jeden Eigenwert λ eine Basis des Eigenraums $\mathrm{Eig}(\mathbf{A}; \lambda)$ und die geometrische Vielfachheit,

(e) ob $\mathbf{A}$ diagonalisierbar ist (mit Begründung).