7 Vektorräume

7.1 Der n-dimensionale reelle Raum $\mathbb{R}^n$

Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen lässt sich über die Zahlengerade darstellen. Möchten man jedoch eine Ebene betrachten, so lässt sich diese als $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auffassen und man benötigt zum Beschreiben eines Punktes jeweils ein Paar von reellen Zahlen $(x, y), x, y \in \mathbb{R}$ (sogenannte 2-Tupel). Analog lässt sich der 3-dimensionale Raum als das karthesische Produkt $\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auffassen und Punkte werden durch ein 3-Tupel $(x, y, z), x, y, z \in \mathbb{R}$ beschrieben. Allgemein lässt sich dies wie folgt definieren.

Definition 7.1 ($\mathbb{R}^n$)
Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ ist der *n-dimensionale reelle Standardraum*

$$\mathbb{R}^n := \{\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } 1 \leq i \leq n\}$$

die Menge der *geordneten n-Tupel* (oder *Vektoren*) von reellen Zahlen. Die einzelnen Einträge $x_1, \ldots, x_n$ der n-Tupel heißen *Komponenten*.

Auf den n-Tupeln lassen sich Addition und Multiplikation dadurch erklären, dass man die Operation komponentenweise durchführt. Man notiert die n-Tupel auch als $\mathbf{x}^T := (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Definition 7.2 (Addition und Multiplikation für n-Tupeln)
Für zwei n-Tupel $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ist die *Addition* definiert durch

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix},$$

und die Multiplikation mit $\lambda \in \mathbb{R}$ durch

$$\lambda \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}.$$

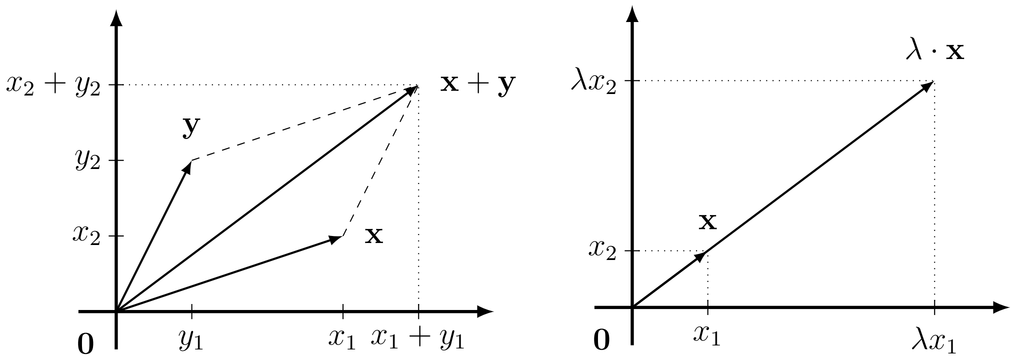

Abbildung 7.1: Illustration zur Addition und Multiplikation im $\mathbb{R}^d$

Nun lässt sich leicht feststellen, dass die Menge der Vektoren die folgenden Eigenschaften hat.

Satz 7.3 (Eigenschaften im $\mathbb{R}^n$)
Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ beliebige Vektoren (oder n-Tupel) und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen (genannt Skalare).

(V1) $(\mathbb{R}^n, +)$ ist eine kommutative Gruppe, d.h.

(Assoziativiät): $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$

(Null): Für $\mathbf{0}^T := (0, 0, \ldots, 0)$ gilt $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$

(Inverse): Für $-\mathbf{x}^T := (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ gilt $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

(Kommutativität): $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$

(V2) Für die Multiplikation von Skalaren und Vektoren gilt:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \cdot \mathbf{x} &= \lambda \cdot \mathbf{x} + \mu \cdot \mathbf{x}, \qquad & \lambda \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \lambda \cdot \mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{y}, \\ \lambda \cdot (\mu \mathbf{x}) &= (\lambda \mu) \cdot \mathbf{x}, \qquad & 1 \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Beweis. Die Aussagen ergeben sich durch direktes Nachrechen und Verwendung der Eigenschaften von $\mathbb{R}$. ☐

Es zeigt sich somit, dass auf der Menge $\mathbb{R}^n$ für die Addition ein neutrales und inverses Element existieren.

Für zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ lässt sich das sogenannte Skalarprodukt definieren.

Definition 7.4 (Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$)
Für zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ist das kanonische *Skalarprodukt* $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

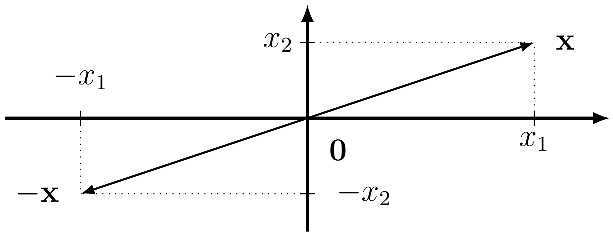

Abbildung 7.2: Illustration des Inversen Vektors im $\mathbb{R}^d$

Satz 7.5 (Eigenschaften des Skalarprodukts im $\mathbb{R}^n$)
Für beliebige Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ und Skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

(i) *Bilinearität*: Die Abbildung ist linear in beiden Einträgen

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle, \qquad &&\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}+\mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z}\rangle, \\ &\langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle, &&\langle \mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}\rangle = \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle. \end{aligned}$$

(ii) *Symmetrie*:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle.$$

(iii) *Positive Definitheit*: Das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst ist nicht-negativ und genau nur für den Nullvekotr null

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \geq 0 \quad \text{und} \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Beweis. Ergibt sich durch direktes Nachrechnen.

Definition 7.6 (Norm im $\mathbb{R}^n$)
Für einen Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist die *euklidische Norm* $\|\cdot\| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\|\mathbf{x}\| := \|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

und wird als *Betrag* oder *Länge* des Vektors bezeichnet.

Einen sehr wichtigen Zusammenhang zwischen Skalarprodukt und Norm stellt die folgende Ungleichung dar.

Satz 7.7 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)
Für zwei beliebige Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|.$$

Beweis. Ist $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oder $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ so gilt die Gleichung direkt. Andernfalls gilt für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ und jedes $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \langle \mathbf{x} - \lambda \mathbf{y}, \mathbf{x} - \lambda \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 2\lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \lambda^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle.$$

Für die Wahl $\lambda = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}$ folgt damit

$$0 \leq \|\mathbf{x}\|^2 - 2\lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \lambda^2 \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - 2\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2}{\|\mathbf{y}\|^2} + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2}{\|\mathbf{y}\|^4} \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2}{\|\mathbf{y}\|^2}$$

und somit

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2.$$

Wurzelziehen liefert die Behauptung.

Damit findet man die essentiellen Eigenschaften der euklidischen Norm.

Satz 7.8 (Eigenschaften der euklidischen Norm)
Für beliebige Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ und Skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

(i) (Definitheit): $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(ii) (Linearität): $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$.

(iii) (Dreiecksungleichung): $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Beweis. Definitheit und Linearität ergibt sich durch direktes Nachrechnen. Für die Dreieckungleichung folgt mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2 \end{aligned}$$

und Wurzelziehen liefert die Behauptung.

Bemerkung 7.9
Für die Darstellung des Skalarprodukts gilt auch die Formel

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cos \measuredangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

wobei $\measuredangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ den Winkel zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ bezeichnet.

Definition 7.10 (Orthogonale Vektoren)
Zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ heißen *orthogonal* oder *senkrecht*, falls gilt

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0.$$

Definition 7.11 (Normierte Vektoren)
Ein Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ heißt *normiert*, falls gilt

$$\|\mathbf{x}\| = 1.$$

Jeden Vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ kann man normieren gemäß

$$\tilde{\mathbf{x}} := \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \cdot \mathbf{x}.$$

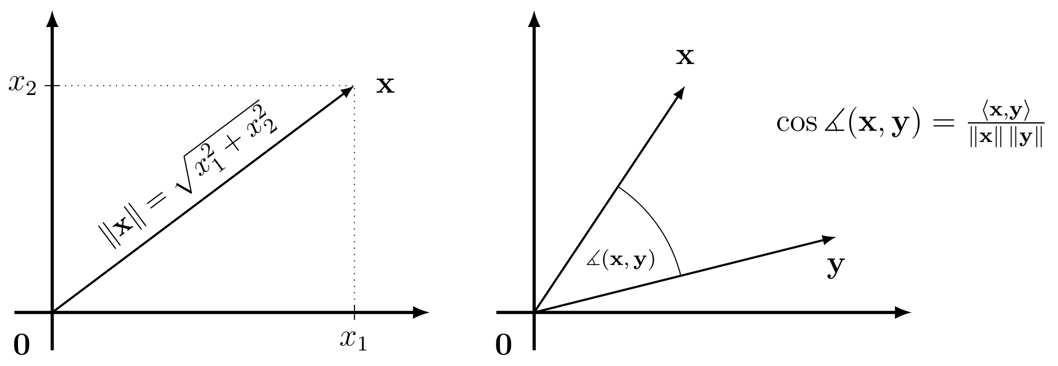

Abbildung 7.3: Die Norm als Abstand zum Ursprung und Interpretation des Skalarprodukts über den Winkel zwischen zwei Vektoren.

7.2 Raum von Folgen und Funktionen

Ziel dieses Abschnitts ist es zu zeigen, dass verschiedenste mathematische Dinge ähnliche Struktur besitzen. Diese unterliegende, gemeinsame Struktur wird im nächsten Abschnitt als (abstrakter) Vektorraum eingeführt. Zur Motivation hier einige Betrachtungen.

Folgen

Eine konsequente Verallgemeinerung des Konzepts der n-Tupel besteht darin Tupel von unendlicher Länge zu betrachten - dies sind Folgen. Betrachtet man die Menge der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$, so lässt sich analog zum $\mathbb{R}^n$ eine Addition und Multiplikation mit Skalaren definieren, indem man die Operationen Komponentenweise ausführt.

Für zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Addition definiert als

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots) + (b_0, b_1, b_2, \ldots) := (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$$

und die Multiplikation mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\lambda \cdot (a_0, a_1, a_2, \ldots) := (\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2, \ldots).$$

Man beachte, dass beide Operationen wieder als Resultat eine Folge liefern. Analog zum $\mathbb{R}^n$ findet man die folgenden Eigenschaften.

Satz 7.12 (Eigenschaften in Raum aller Folgen)
Sei V der Raum aller Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$. Seien $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n \in V$ beliebige Folgen und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ beliebige reelle Zahlen. Dann gilt:

(V1) $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe, d.h.

(Assoziativiät): $(a_n)_n + ((b_n)_n + (c_n)_n) = ((a_n)_n + (b_n)_n) + (c_n)_n$

(Null): Für die Nullfolge $\mathbf{0} := (0, 0, 0, \ldots)$ gilt $(a_n)_n + \mathbf{0} = (a_n)_n$

(Inverse): Für $-(a_n) := (-a_0, -a_1, -a_2, \ldots)$ gilt $(a_n)_n + (-(a_n)_n) = \mathbf{0}$

(Kommutativität): $(a_n)_n + (b_n)_n = (b_n)_n + (a_n)_n$

(V2) Für die Multiplikation von reellen Zahlen und Folgen gilt:

$$(\lambda + \mu) \cdot (a_n)_n = \lambda \cdot (a_n)_n + \mu \cdot (a_n)_n, \qquad \lambda \cdot ((a_n)_n + (b_n)_n) = \lambda \cdot (a_n)_n + \lambda \cdot (b_n)_n,$$
$$\lambda \cdot (\mu (a_n)_n) = (\lambda\mu) \cdot (a_n)_n, \qquad 1 \cdot (a_n)_n = (a_n)_n.$$

Beweis. Die Aussagen ergeben sich durch direktes Nachrechen und Verwendung der Eigenschaften von $\mathbb{R}$. □

Polynomräume

Es sei daran erinnert, dass man zu einem Körper $\mathbb{K}$ (z.B. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) Polynome bilden kann.

Definition 7.13 (Polynom und Grad)
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und x eine Unbestimmte. Ein *Polynom* mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ ist ein Ausdruck der Form

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ gilt.

Der *Grad* eines Polynomes ist der höchste, nicht verschwindende Koeffizient

$$\deg P := \begin{cases} \max\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}, & (f \neq 0) \\ -\infty, & (f = 0). \end{cases}$$

Die Menge aller Polynome wird mit $\mathbb{K}[x]$ bezeichnet. Die Menge aller Polynome mit Grad kleiner gleich n wird mit $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ bezeichnet.

Betrachtet man zwei Polynome $f, g \in \mathbb{K}[x]$, so lassen sich diese in natürlicher Weise addieren. Gilt $f(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ und $g(x) := b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ mit $m < n$, so wählt man formal $b_{m+1} = \ldots = b_n = 0$ und erhält Polynome vom selben Grad (analog für $n < m$). Die Addition ist nun gegeben durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots + (a_n + b_n)x^n.$$

Man beachte, dass $\deg f + g \leq \max(\deg f, \deg g)$ gilt, d.h. es handelt sich um eine Abbildung $+ : \mathbb{K}[x]_{\leq n} \times \mathbb{K}[x]_{\leq n} \to \mathbb{K}[x]_{\leq n}$.

Ebenso lässt sich eine Multiplikation mit Werten aus $\mathbb{K}$ in natürlicher Weise aufstellen. Gilt $f(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, so ist die Multiplikation mit dem Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ gegeben durch

$$(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x) := (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + (\lambda a_2)x^2 + \ldots + (\lambda a_n)x^n$$

und bei dieser Multiplikation ist der Grad des Polynoms höchstens so groß wie zuvor, d.h. es handelt sich um eine Abbildung $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}[x]_{\leq n} \to \mathbb{K}[x]_{\leq n}$.

Schaut man sich diese Addition und Multiplikation genauer an, so findet man Eigenschaften analog zu denen, die man bereits aus dem $\mathbb{R}^n$ kennt.

Satz 7.14 (Eigenschaften in $\mathbb{K}[x]$)
Seien $f, g, h \in \mathbb{K}[x]$ beliebige Polynome und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ beliebige Skalare. Dann gilt:

(V1) $(\mathbb{K}[x], +)$ ist eine kommutative Gruppe, d.h.

(Assoziativiät): $f + (g + h) = (f + g) + h$.

(Null): Für das Nullpolynom 0 gilt $f + 0 = f$.

(Inverse): Für $-f := -a_0 - a_1 x - \ldots - a_n x^n$ gilt $f + (-f) = 0$.

(Kommutativität): $f + g = g + f$

(V2) Für die Multiplikation von Skalaren und Polynomen gilt:

$$(\lambda + \mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f, \qquad \lambda \cdot (f + g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g,$$
$$\lambda \cdot (\mu f) = (\lambda\mu) \cdot f, \qquad 1 \cdot f = f.$$

Beweis. Die Aussagen ergeben sich durch direktes Nachrechen und Verwendung der Eigenschaften von $\mathbb{K}$. □

Funktionenräume

Allgemeiner kann man auch die Menge der Funktionen von einer Menge D in einen Körper $\mathbb{K}$ betrachten. Dann definiert man für diese Menge

$$\mathrm{Abb}(D, \mathbb{K}) := \{f : D \to \mathbb{K}\}$$

die Addition zweier Funktionen sowie die Multiplikation mit Skalaren $\lambda \in \mathbb{K}$ durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \qquad \text{und} \qquad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

und erhält dadurch erneut Abbildung

$$+ : \mathrm{Abb}(D, \mathbb{K}) \times \mathrm{Abb}(D, \mathbb{K}) \to \mathrm{Abb}(D, \mathbb{K}) \text{ und}$$
$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathrm{Abb}(D, \mathbb{K}) \to \mathrm{Abb}(D, \mathbb{K}),$$

d.h. diese beiden Verknüpfungen bilden erneut in diesselbe Menge ab.

Auch diese Menge besitzt analoge Struktur wie die bereits besprochenen Fälle.

7.3 Allgemeine Definition von Vektorräumen

Die vorangegangenen Beispiele zeigen, dass viele verschiedene mathematische Strukturen dieselbe unterliegenden Eigenschaften besitzen. Somit lassen sich alle Strukturen auf einmal untersuchen, indem man sich auf einen abstrakten Standpunkt zurückzieht und anstatt konkreter Räume ganz allgemein sogenannte *Vektorräume* betrachtet.

Definition 7.15 (Vektorraum)
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Eine Menge V zusammen mit einer *inneren Verknüpfung* (*Addition*)

$$+ : V \times V \to V, \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} + \mathbf{w},$$

und einer *äußeren Verknüpfung* (*skalare Multikplikation* bzw. *Multiplikation mit Skalaren*)

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V, \quad (\lambda, \mathbf{v}) \mapsto \lambda \cdot \mathbf{v},$$

heißt $\mathbb{K}$-*Vektorraum* (oder auch *Vektorraum über* $\mathbb{K}$), falls gilt:

(V1) $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe, d.h.

(Assoziativiät): $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$

(Nullvektor): Es gibt einen Vektor $\mathbf{0}$ mit $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ für alle $\mathbf{v} \in V$

(Inverse): Zu jedem Vektor $\mathbf{v} \in V$ gibt es einen Vektor $-\mathbf{v} \in V$ mit $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

(Kommutativität): $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

(V2) Für die Multiplikation von Skalaren und Vektoren gilt:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \cdot \mathbf{v} &= \lambda \cdot \mathbf{v} + \mu \cdot \mathbf{v}, & \lambda \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \lambda \cdot \mathbf{v} + \lambda \cdot \mathbf{w}, \\ \lambda \cdot (\mu \mathbf{v}) &= (\lambda \mu) \cdot \mathbf{v}, & 1 \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{v}, \end{aligned}$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

Beispiele 7.16

(i) $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ oder allgemein der $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{K}^n$.

(ii) Die Polynomräume $\mathbb{K}[x]$ und $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ für einen Körper $\mathbb{K}$.

(iii) Der Raum aller unendlichen Folgen.

(iv) Der Raum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

(v) Der Raum aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

(vi) Der Raum aller differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

Definition 7.17 (Untervektorraum)
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \subset V$ eine Teilmenge. Dann heißt U *Untervektorraum* von V, falls gilt:

(UV1) $U \neq \emptyset$,

(UV2) $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$,

(UV3) $\mathbf{v} \in U, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda \cdot \mathbf{v} \in U$,

Beispiele 7.18
Jeder Vektorraum V hat die trivialen Untervektorräume $\{\mathbf{0}\}$ und V selbst.

Die Vektorraum $\mathbb{R}^1$ hat genau die zwei trivialen Untervektorräume $\{\mathbf{0}\}$ und $\mathbb{R}$.

Der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ hat die Untervektorräume

(i) Der Nullvektorraum $\{\mathbf{0}\}$,

(ii) alle Geraden durch den Urspruch $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\}$ mit $a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0)$,

(iii) den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ selbst.

Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ hat als Unterräume $\{\mathbf{0}\}$, alle Geraden durch den Urspruch, alle Ebenen durch den Ursprung und $\mathbb{R}^3$ selbst.

Satz 7.19
Ein Untervektorraum $U \subset V$ ist wieder ein Vektorraum.

Beweis. Addition und skalare Multiplikation sind nach (UV2) und (UV3) abgeschlossen, bilden also wieder in U ab. Die Kommuntativität und Assoziativität gilt, da sie auch schon in V vorhanden war und man sich nun nur auf eine Teilmenge $U \subset V$ beschränkt. Alle Bedingungen (V2) folgen ebenfalls direkt von V. Da $U \neq \emptyset$ mindestens einen Vektor $\mathbf{v} \in U$ enthält, ist wegen (UV3) auch $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{v} \in U$ enthalten. Zudem ist wegen (UV3) auch $-\mathbf{v} = (-1) \cdot \mathbf{v} \in U$ das Inverse.

7.4 Linearkombination, Span und lineare Unabhängigkeit

Hat man eine Teilmenge an Vektoren von einem Vektorraum, so bilden diese nicht automatisch einen Unterraum. Man kann sich jedoch fragen, ob man diese Menge durch Hinzunahme weiterer geeigneter Vektoren zu einem Unterraum machen kann. Dies bezeichnt man als *Abschluss* des Vektorraums. Speziell möchte man gerne mit möglichst wenig zusätzlichen Vektoren einen Unterraum erhalten. Dies motiviert die folgende Betrachtung.

Definition 7.20 (Familie)
Sei I eine Indexmenge und V ein Vektorraum. Eine Abbildung

$$\varphi : I \to V, \qquad i \mapsto \mathbf{v}_i = \varphi(i),$$

die einem *Index* i ein Element aus $\mathbf{v}_i \in V$ zuordnet, heißt *Familie* von Vektoren. Die Familie $I \to V$ wird auch mit $(\mathbf{v}_i)_{i \in I}$ bezeichnet.

In einer Familie können Vektoren mehrfach auftreten und (im Gegensatz zu einer Menge) ist die Reihenfolge von Bedeutung.

Beispiel 7.21 (i) Für $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ ist $(\mathbf{v}_i)_{i\in\{1,2,\ldots,n\}} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ eine endliche Familie an Vektoren.

(ii) Für $I = \{1, 2, 3, 4\}$ und $V = \mathbb{R}^2$ ist $(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})$ eine Familie von 4 Vektoren.

(iii) Für $I = \mathbb{N}$ ist $= (\mathbf{v}_i)_{i\in\mathbb{N}} = (\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots)$ eine unendliche Familie an Vektoren. Dies wird auch als *Folge* bezeichnet.

(iv) Für $I = \mathbb{N}$ und $V = \mathbb{R}[x]$ ist $(1, x, x^2, x^3, \ldots)$ eine Familie.

(v) Für die leere Indexmenge $I = \emptyset$ ist $(\mathbf{v}_i)_{i\in\emptyset} = (\,)$ die *leere* Familie.

Definition 7.22 (Linearkombination)
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(\mathbf{v}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren aus V.

(i) Zu einer endlichen Familie $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$ mit $r \in \mathbb{N}$ und Skalaren $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ nennt man den Vektor

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_r\mathbf{v}_r$$

eine *Linearkombination* der Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$.

(ii) Für eine unendliche Familie $(\mathbf{v}_i)_{i\in I}$ heißt ein Vektor $\mathbf{v}$ *Linearkombination* der Vektoren $(\mathbf{v}_i)_{i\in I}$, falls $\mathbf{v}$ Linearkombination einer endlichen Teilfamilie von $(\mathbf{v}_i)_{i\in I}$ ist, d.h. es gibt ein $r \in \mathbb{N}$, Indizes $i_1, \ldots, i_r \in I$ und Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, so dass

$$\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_{i_1} + \lambda_2\mathbf{v}_{i_2} + \ldots + \lambda_r\mathbf{v}_{i_r}.$$

Betrachtet man zu einer Familie von Vektoren alle möglichen Linearkombinationen, so erhält man einen Raum der als Abschluss, Aufspann oder lineare Hülle bezeichnet wird.

Definition 7.23 (Lineare Hülle / Span / Erzeugnis)
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(\mathbf{v}_i)_{i\in I}$ eine (endliche oder unendliche) Familie von Vektoren. Die Menge aller Linearkombinationen

$$\operatorname{span}(\mathbf{v}_i)_{i\in I} := \{\mathbf{v} \,|\, \mathbf{v} \text{ ist Linearkombination der Vektoren } (\mathbf{v}_i)_{i\in I}\}$$

heißt *lineare Hülle* oder *Span*.

Für eine endlich Familie $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$ schreibt man dies auch als

$$\mathbb{K}\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbb{K}\mathbf{v}_r := \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r) = \{\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_r\mathbf{v}_r \,|\, \lambda_i \in \mathbb{K}\}.$$

Für die leere Familie setzt man

$$\operatorname{span}(\mathbf{v}_i)_{i\in\emptyset} := \{\mathbf{0}\}.$$

Beispiel 7.24 (i) Für $(\mathbf{v_i})_{i\in\{1\}} = (\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})$ ist

$$\operatorname{span}(\mathbf{v_i})_{i\in\{1\}} = \operatorname{span}(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = \{\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \mid \lambda_1 \in \mathbb{K}\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

eine Gerade durch den Ursprung.

(ii) Für $(\mathbf{v_i})_{i\in\{1,2,3\}} = (\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})$ ist

$$\begin{aligned}\operatorname{span}(\mathbf{v_i})_{i\in\{1,2,3\}} &= \operatorname{span}(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = \{\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \mid \lambda_i \in \mathbb{K}\}\\ &= \{\begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_3\\ \lambda_2+\lambda_3\end{pmatrix} \mid \lambda_i \in \mathbb{K}\} = \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

der Raum $V = \mathbb{R}^2$ selbst.

In den Beispielen sieht man, dass der Span ein Untervektorraum ist. Dies gilt ganz allgemein und sogar noch mehr: $\operatorname{span}(\mathbf{v}_i)$ ist der kleinste Untervektorraum von V, der alle $\mathbf{v}_i$ enthält.

Satz 7.25 (Span ist kleinster Untervektorraum zu einer Familie)
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(\mathbf{v}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren aus V. Dann gilt:

(i) $\operatorname{span}(\mathbf{v}_i)_{i\in I}$ ist ein Untervektorraum von V.

(ii) Ist $W \subset V$ auch ein Untervektorraum, der alle $\mathbf{v}_i, i \in I$ enthält, so gilt

$$\operatorname{span}(\mathbf{v}_i)_{i\in I} \subset W.$$

Beweis. (i) Zu endlichen Linearkombinationen $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_r\mathbf{v}_r$ und $\mu_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \mu_r\mathbf{v}_r$ ist auch die Summe

$$(\lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_r\mathbf{v}_r) + (\mu_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \mu_r\mathbf{v}_r) = (\lambda_1+\mu_1)\mathbf{v}_1 + \ldots + (\lambda_r+\mu_r)\mathbf{v}_r$$

als auch das Produkt mit einem Skalar λ

$$\lambda(\lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_r\mathbf{v}_r) = (\lambda\lambda_1)\mathbf{v}_1 + \ldots + (\lambda\lambda_r)\mathbf{v}_r$$

eine Linearkombination. Durch die Wahl von $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$ ist zudem $\mathbf{0}$ enthalten.

(ii) Da W Untervektorraum ist, sind alle endlichen Linearkombinationen von Vektoren aus W wieder in W enthalten. Da speziell auch alle $\mathbf{v}_i \in W$ liegen, sind somit auch alle Linearkombination der $\mathbf{v}_i$ (und somit $\operatorname{span}(\mathbf{v}_i)_{i\in I}$) enthalten.

Einen gegebenen (Unter-)Vektorraum kann man durch viele verschiedene Familien aufspannen (bzw. erzeugen). So ist zum Beispiel

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Im Allgemeinen existieren unendlich viele Möglichkeiten um einen Vektor linear zu kombinieren. Speziell lässt sich der Nullvektor immer durch

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + \ldots + 0\mathbf{v}_r$$

linearkombinieren. Gibt es noch weitere Koeffizienten $\lambda_i \neq 0$, die dies erfüllen, so ist die Eindeutigkeit der Darstellung nicht gegeben. Man bezeichnet dann die Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ als linear abhängig.

Definition 7.26 (Lineare Unabhängigkeit)
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine endliche Familie $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$ heißt *linear unabhängig*, falls sich der Nullvektor nur durch Nullkoeffizienten linearkombinieren lässt, d.h. für eine Darstellung mit Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ gilt stets

$$\mathbf{0} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_r\mathbf{v}_r \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0.$$

Eine unendliche Familie $(\mathbf{v}_i)_{i\in I}$ heißt linear unabhängig, falls jede endliche Teilfamilie linear unabhängig ist.

Eine Familie $(\mathbf{v}_i)_{i\in I}$ heißt *linear abhängig*, falls sie nicht linear unabhängig ist.

Die leere Familie () ist linear unabhängig.

Satz 7.27 (Charakterisierung linear abhängiger Vektoren)
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $r \in \mathbb{N}, r \geq 2$. Eine Familie von Vektoren $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$ ist genau dann *linear abhängig*, wenn mindestens einer der Vektoren Linearkombination der anderen ist.

Beweis. „Linear abhängig $\Rightarrow$ Linearkombination“: Sind $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ linear abhängig, so gibt es Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ mit mindestens einem $\lambda_k \neq 0, k \in \{1, \ldots, r\}$, so dass sich der Nullvektor nichttrivial kombinieren lässt: $\mathbf{0} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_k\mathbf{v}_k + \ldots + \lambda_r\mathbf{v}_r$. Löst man nach $\mathbf{v}_k$ auf, so ist dieser Linearkombination der übigen, denn

$$\mathbf{v}_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\mathbf{v}_1 - \ldots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\mathbf{v}_{k-1} - \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\mathbf{v}_{k+1} - \ldots - \frac{\lambda_r}{\lambda_k}\mathbf{v}_r.$$

„Linearkombination $\Rightarrow$ linear abhängig“: Gilt umgekehrt

$$\mathbf{v}_k = \mu_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \mu_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + \mu_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \ldots + \mu_r\mathbf{v}_r,$$

so lässt sich der Nullvektor mit $\lambda_k = -1 \neq 0$ linearkombinieren gemäß

$$\mathbf{0} = \mu_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \mu_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + (-1)\mathbf{v}_k + \mu_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \ldots + \mu_r\mathbf{v}_r.$$

□

Dieser Satz sagt zugleich, dass sich bei linear unabhängigen Vektoren $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$ keiner der Vektoren $\mathbf{v}_i$ durch die übrigen linear kombinieren lässt und somit als einzige Möglichkeit nur eine Darstellung durch sich selbst bleibt. Es gilt sogar noch mehr: Jeder Vektor in der linearen Hülle lässt sich eindeutig linear kombinieren.

Satz 7.28 (Charakterisierung linear unabhängiger Vektoren)
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Familie von Vektoren $(\mathbf{v}_i)_{i\in I}$ ist genau dann *linear unabhängig*, wenn sich jeder Vektor $v \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_i)_{i\in I}$ als *eindeutige* Linearkombination aus $(\mathbf{v}_i)_{i\in I}$ schreiben lässt.

Beweis. „Linear unabhängig $\Rightarrow$ Eindeutigkeit“: Sei $v \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_i)_{i\in I}$ auf zwei Arten linear kombinierbar, d.h. es gebe Skalare λ_i, μ_i und gelte

$$\sum_{i\in I} \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{v} = \sum_{i\in I} \mu_i \mathbf{v}_i,$$

wobei nur endlich viele der λ_i, μ_i ungleich Null sind. Damit gilt jedoch auch

$$\sum_{i\in I} (\lambda_i - \mu_i)\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

und wegen der linearen Unabhängigkeit müssen alle Koeffizienten $\lambda_i - \mu_i = 0$ verschwinden. Somit ist $\lambda_i = \mu_i$ und die Darstellung eindeutig.

„Eindeutigkeit $\Rightarrow$ linear unabhängig“: Der Nullvektor lässt sich stets als $\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + \ldots + 0\mathbf{v}_r$ kombinieren. Ist die Darstellung eindeutig, so muss für alle weiteren Darstellungen $\mathbf{0} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_r\mathbf{v}_r$ folgen, dass $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$ gilt.

7.5 Basis und Dimension

Definition 7.29 (Erzeugenensystem, Basis)
Sei V ein Vektorraum.

(i) Eine Familie $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_i)_{i\in I}$ heißt *Erzeugendensystem* von V, wenn

$$V = \operatorname{span}(\mathbf{v}_i)_{i\in I}$$

ist, d.h. jedes $\mathbf{v} \in V$ ist eine (endliche) Linearkombination der $(\mathbf{v}_i)_{i\in I}$.

(ii) Eine Familie $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_i)_{i\in I}$ heißt *Basis* von V, wenn sie eine linear unabhängiges Erzeugendensystem ist, d.h. jedes $\mathbf{v} \in V$ ist eine *eindeutige* (endliche) Linearkombination der $(\mathbf{v}_i)_{i\in I}$.

Existiert ein endliches Erzeugendensystem $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$, so nennt man V *endlich erzeugt*. Eine Basis heißt *endlich*, falls sie eine endliche Familie $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ist.

Beispiele 7.30

(i) Für $n \in \mathbb{N}$ und $V = \mathbb{R}^n$ ist die *kanonische* Basis (oder *Standardbasis*) gegeben durch

$$\mathbf{e}_i := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0),$$

wobei die 1 an der i-ten Stelle steht. Damit ist $\operatorname{span}(\mathbf{e}_i)_{i=\{1,\ldots,n\}} = \mathbb{R}^n$.

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ und $V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ ist die *kanonische* Basis gegeben durch

$$(1, x, x^2, \ldots, x^n).$$

(iii) Für $V = \mathbb{R}[x]$ ist die *kanonische* Basis gegeben durch

$$(1, x, x^2, \ldots).$$

Dieser Raum ist nicht endlich erzeugt.

(iv) Für $V = \mathcal{C}$ (aufgefasst als $\mathbb{R}$-Vektorraum) ist die *kanonische* Basis gegeben durch

$$(1, i).$$

Satz 7.31 (Äquivalenzen zu einer endlichen Basis)
Für eine endliche Familie $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ von Vektoren sind äquivalent:

(i) $\mathcal{B}$ ist Basis (d.h. ein linear unabhängiges Erzeugendensystem).

(ii) $\mathcal{B}$ ist ein *unverkürzbares* Erzeugendensystem, d.h. für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ ist $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n)$ kein Erzeugendensystem mehr.

(iii) $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem mit Eindeutigkeit der Darstellung, d.h. jedes $\mathbf{v} \in V$ lässt sich eindeutig als Linearkombination $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n$ schreiben.

(iv) $\mathcal{B}$ ist *unverlängerbar* linear unabhängig, d.h. für jedes $\mathbf{v} \in V$ ist $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v})$ nicht mehr linear unabhängig.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Angenommen, $\mathcal{B}$ wäre um $\mathbf{v}_k$ verkürzbar und weiterhin Erzeugendensystem. Dann lässt sich $\mathbf{v}_k = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_{k-1} \mathbf{v}_{k-1} + \lambda_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n$ darstellen und nach Umstellung gilt $\mathbf{0} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_{k-1} \mathbf{v}_{k-1} + (-1)\mathbf{v}_k + \lambda_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n$. Somit wäre $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ linear abhängig im Widerspruch zur Unabhängigkeit einer Basis.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Angenommen es existiert zu einem unverkürzbaren Erzeugendensystem eine nicht eindeutige Darstellung zu einem Element $\mathbf{v} \in V$. Dann

$$\exists \mathbf{v} \in V: \quad \mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mu_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \mu_n \mathbf{v}_n.$$

O.B.d.A. $\lambda_1 \neq \mu_1$ (die $\mathbf{v}_i$ können stets entsprechend umsortiert werden). Dann folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (\lambda_1 - \mu_1)\mathbf{v}_1 + ... + (\lambda_n - \mu_n)\mathbf{v}_n \\ \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 &= \frac{\mu_2 - \lambda_2}{\lambda_1 - \mu_1}\mathbf{v}_2 + \ldots + \frac{\mu_n - \lambda_n}{\lambda_1 - \mu_1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbf{v}_i$ linear abhängig $\Rightarrow \mathcal{B}$ verkürzbar. Widerspruch!

(iii) $\Rightarrow$ (iv): $\mathcal{B}$ ist linear unabhängig auf Grund der eindeutigen Darstellbarkeit. Fügt man noch einen weiteren Vektor $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n$ zur Familie hinzu, so wird diese wegen $\mathbf{0} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n + (-1)\mathbf{v}$ linear abhängig.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Ist $\mathcal{B}$ unverlängerbar linear unabhängig, so gibt es für jedes $v \in V$ Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda \in \mathbb{K}$, so dass $\mathbf{0} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n + \lambda \mathbf{v}$, wobei mindestens eines der $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda \neq 0$. Da $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ linear unabhängig sind, muss folglich $\lambda \neq 0$ gelten und somit gilt

$$\mathbf{v} = -\frac{\lambda_1}{\lambda}\mathbf{v}_1 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda}\mathbf{v}_n.$$

Somit ist $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem und linear unabhängig, d.h. eine Basis. □

Daraus folgt direkt die Existenz einer Basis für endliche Vektorräume.

Satz 7.32 (Basisauswahlsatz)
Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum. Dann kann man aus dem endlichen Erzeugendensystem eine endliche Basis auswählen.

Beweis. Sei das endliche Erzeugendensystem gegeben. Aus diesem entfernt man solange Vektoren, bis es kein Erzeugendensystem mehr ist, d.h bis es unverkürzbar ist. Damit ist die so entstanden Familie eine Basis.

Allgemeiner lässt sich zeigen, dass sogar jeder Vektorraum eine Basis besitzt. Dieser Beweis ist aufwändiger und wir daher weggelassen.

Eine Basis zu einem Vektorraum ist nicht eindeutig. Vielmehr kann man viele verschiedenen Basen wählen. Man kann bei einer vorgegebenen Basis sogar geeignet Vektoren austauschen und erhält erneut eine Basis. Betrachtet man zunächst nur den Austausch eines Vektors, so findet man die folgende Aussage.

Satz 7.33 (Austauschlemma)
Sie V ein Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ und $\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n \in V$. Gilt $\lambda_k \neq 0$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$, so ist auch $\mathcal{B}' = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{w}, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n)$ eine Basis von V.

Beweis. Zu zeigen ist, dass $\mathcal{B}'$ eine Basis ist.

Erzeugendensystem: Wegen $\lambda_k \neq 0$ gilt für $\mathbf{v}_k$ die Darstellung

$$\mathbf{v}_k = \frac{1}{\lambda_k}\mathbf{w} - \frac{\lambda_1}{\lambda_k}\mathbf{v}_1 - \ldots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\mathbf{v}_{k-1} - \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\mathbf{v}_{k+1} - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\mathbf{v}_n.$$

und somit für einen beliebigen Vektor $\mathbf{v} = \mu_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \mu_n \mathbf{v}_n$ die Darstellung

$$\begin{array}{rccccccccccc} \mathbf{v} = & \mu_1 & \mathbf{v}_1 & + \ldots & + & \mu_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} & & + & \mu_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} & + \ldots & + & \mu_n \mathbf{v}_n \\ & -\frac{\mu_k \lambda_1}{\lambda_k} & \mathbf{v}_1 & + \ldots & - & \frac{\mu_k \lambda_{k-1}}{\lambda_k}\mathbf{v}_{k-1} & +\frac{\mu_k}{\lambda_k}\mathbf{w} & - & \frac{\mu_k \lambda_{k+1}}{\lambda_k}\mathbf{v}_{k+1} & + \ldots & - & \frac{\mu_k \lambda_n}{\lambda_k}\mathbf{v}_n. \end{array}$$

Somit lässt sich ein beliebiger Vektor $v \in V$ auch als Linearkombination der Familie $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{w}, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n)$ darstellen und $\mathcal{B}'$ ist ein Erzeugendensystem.

Lineare Unabhängigkeit: Sei $\mu_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \mu_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} + \mu\mathbf{w} + \mu_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \ldots + \mu_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ mit Koeffizienten $\mu, \mu_1, \ldots, \mu_n$. Durch Einsetzen von $\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n$ findet man

$$\begin{array}{rccccccccccc} \mathbf{0} = & \mu_1 & \mathbf{v}_1 & +\ldots & + & \mu_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} & & + & \mu_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} & +\ldots & + & \mu_n\mathbf{v}_n \\ & +\mu\lambda_1 & \mathbf{v}_1 & +\ldots & + & \mu\lambda_{k-1}\mathbf{v}_{k-1} & +\mu\lambda_k\mathbf{v}_k & + & \mu\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} & +\ldots & + & \mu\lambda_n\mathbf{v}_n \end{array}$$

und, da $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist, folglich für die Koeffizienten $\mu\lambda_k = 0$ sowie $(\mu_i + \mu\lambda_i) = 0$ für $i \neq k$. Da $\lambda_k \neq 0$ folgt zunächst $\mu = 0$ und damit $\mu_i = 0$ für $i \neq k$. □

Möchte man gleich mehrere Vektoren austauschen, so findet man den Basisaustauschssatz von Steinitz.

Satz 7.34 (Basisaustauschsatz)
Sei V ein Vektorraum, $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ eine endliche Basis und $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r)$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren.

Dann folgt:

(i) $r \leq n$.

(ii) Man kann r Vektoren aus $\mathcal{B}$ durch $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r$ austauschen, so dass man erneut eine Basis erhält, d.h. nach evtl. Umnummerierung der $(\mathbf{v}_i)_{1,\ldots,n}$ ist auch

$$(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n)$$

eine Basis von V.

Beweis. Induktion über r:

Für $r = 1$: Sei ein linear unabhäniger Vektor $\mathbf{w}_1 \neq \mathbf{0}$ gegeben. Die Basis enthält somit auch mindestens einen Vektor (es gilt also $1 \leq n$) und gemäß des Austauschlemmas lässt sich $\mathbf{w}_1$ für einen Vektor in der Basis ersetzen und erhält wieder eine Basis.

Sei nun $r \geq 2$ und per Induktionsannahme die Aussage bewiesen für $r - 1$. Es müssen zwei Dinge gezeigt werden.

(i) "$r \leq n$": Nach Induktionsannahme gilt bereits $r - 1 \leq n$. Damit bleibt noch zu zeigen, dass der Fall $r - 1 = n$ nicht eintreten kann. Dazu ein Widerspruchsbeweis: Angenommen, es gälte $r - 1 = n$. Auch bereits die Vektoren $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{r-1})$ sind linear unabhängig und nach Induktionsvoraussetzung kann man alle n Elemente der Basis $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ durch die $r - 1$ Vektoren $(\mathbf{w}_i)_{1 \leq i \leq r-1}$ ersetzen und erhält wieder eine Basis $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{r-1})$. Eine Basis ist aber unverlängerbar linear unabhängig und daher ist $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{r-1}, \mathbf{w}_r)$ linear abhängig. Widerspruch.

(ii) "$(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n)$ eine Basis": Nach Induktionsvorausssetzung lassen sich die $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{r-1})$ derart austauschen, dass (nach evtl. Umnummerierung) auch

$$(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{r-1}, \mathbf{v}_r, \ldots, \mathbf{v}_n)$$

eine Basis bilden. Somit kann man auch $\mathbf{w}_r$ durch diese Basis als Linearkombination

$$\mathbf{w}_r = \lambda_1 \mathbf{w}_1 + \ldots + \lambda_{r-1}\mathbf{w}_{r-1} + \lambda_r \mathbf{v}_r + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n$$

ausdrücken. Dabei muss einer der Koeffizienten $\lambda_r, \ldots, \lambda_n$ nicht 0 sein, denn andernfalls wäre $\mathbf{0} = -\mathbf{w}_r + \lambda_1 \mathbf{w}_1 + \ldots + \lambda_{r-1}\mathbf{w}_{r-1}$ im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit. Gemäß dem Austauschlemma lässt sich der zugehörige Vektor durch $\mathbf{w}_r$ ersetzen. Nach geeigneter Umnummerierung sei dieser Vektor $\mathbf{v}_r$ und somit ist auch $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n)$ eine Basis.

□

Die Aussage dieses Satzes lässt sich auch so verstehen, dass man linear unabhängige Familien zu einer Basis auffüllen kann.

Satz 7.35 (Basisergänzungssatz)
Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum. Dann lässt sich jede linear unabhängige Familie $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r)$ durch Hinzunahme geeigneter Vektoren zu einer Basis $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ergänzen.

Beweis. Man wählt eine Basis (diese existiert gemäß Basisauswahlsatz) und wendet den Basisaustauschsatz an.

Durch den Satz ist auch geklärt, dass für jeden endlichen Vektorraum alle Basen dieselbe Länge haben.

Satz 7.36 (Länge endlicher Basen)
Je zwei Basen eines endlichen Vektorraums haben gleiche Länge.

Beweis. Hat man zwei Basen der Länge n und m, so kann man den Basisaustauschsatz zweimal anwenden und erhält $n \le m$ und $m \le n$, also $n = m$.

Somit lässt sich definieren.

Definition 7.37 (Dimension)
Für einen $\mathbb{K}$-Vektorraum V heißt

$$\dim_{\mathbb{K}} V := \begin{cases} n, & \text{falls } V \text{ eine Basis der Länge } n \in \mathbb{N} \text{ besitzt,} \\ \infty, & \text{falls } V \text{ keine endliche Basis besitzt,} \end{cases}$$

die *Dimension* von V über $\mathbb{K}$.

Beispiele 7.38

(i) Der Raum $\mathbb{R}^n$ hat Dimension n.

(ii) Die Vektorraum der Polynome hat Dimension $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[x] = \infty$.

(iii) Der Vektorraum $\mathbb{C}$, aufgefasst als Vektorraum über $\mathbb{R}$, hat Dimension $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.