Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Mathematatik für Studierende der Bioinformatik 1

(Übung zu B-MBI-1, Wintersemester 2015/2016)

Dr. S. Reiter, Dr. A. Vogel, Prof. Dr. G. Wittum

Aufgabenblatt 12 (Abgabe: Mo., 1.2.2016, 10:15h)

Aufgabe 1 (Norm und Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$, 6P)
Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren, $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ das kanonische Skalarprodukt und $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die euklidische Norm.
Zeigen Sie:

(i) $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2$

(ii) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2$

Aufgabe 2 (Skalarprodukt und Orthogonalität im $\mathbb{R}^n$, 6P)
Gemäß Vorlesung werden zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ als *orthogonal* bezeichnet ($\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$), wenn gilt:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0.$$

a) Geben sie zu den folgenden Vektoren je einen vom *Nullvektor* verschiedenen orthogonalen Vektor an ($a, b, c \in \mathbb{R}$):

$$\text{(i)} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \text{(iii)} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

b) Sei $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{w}\| > 0$, dann ist durch $L := \{\mathbf{v} + \lambda \mathbf{w} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade im $\mathbb{R}^n$ definiert. Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt dann:

$$\mathbf{x} \perp L \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \mathbf{y}, \mathbf{z} \in L : \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} - \mathbf{y} \rangle = 0.$$

Zeigen Sie dass mit $\mathbf{x} \perp L$ auch gilt: $\mathbf{x} \perp \mathbf{w}$.

Aufgabe 3 (Der Vektorraum $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, 6P)
Zeigen Sie, dass die Menge der Polynome von höchstens Grad 2

$$\mathbb{R}[x]_{\leq 2} := \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

mit der Addition für $f = a_0 + a_1x + a_2x^2$ und $g = b_0 + b_1x + b_2x^2$

$$f + g := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$$

sowie der Skalarmultiplikation für $f = a_0 + a_1x + a_2x^2, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \cdot f := (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + (\lambda a_2)x^2$$

einen Vektorraum bildet, indem Sie die Vektorraumdefinition nachprüfen. Zeigen Sie dazu

(V1) $(\mathbb{R}[x]_{\leq 2}, +)$ ist eine kommutative Gruppe, d.h. $\forall f, g, h \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$:

(Assoziativiät): $f + (g + h) = (f + g) + h$.

(Null): Für das Nullpolynom 0 gilt $f + 0 = f$.

(Inverse): Es existiert $-f \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}: \; f + (-f) = 0$.

(Kommutativität): $f + g = g + f$

(V2) Für die Multiplikation von Skalaren und Polynomen gilt $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$:

$$(\lambda + \mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f, \qquad \lambda \cdot (f + g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g,$$
$$\lambda \cdot (\mu f) = (\lambda\mu) \cdot f, \qquad 1 \cdot f = f.$$