Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Mathematatik für Studierende der Bioinformatik 1

(Übung zu B-MBI-1, Wintersemester 2015/2016)

Dr. S. Reiter, Dr. A. Vogel, Prof. Dr. G. Wittum

Aufgabenblatt 9 (Abgabe: Mo., 11.1.2016, 10:15h)

Aufgabe 1 (Approximation der Ableitung, 6P)
Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine viermal stetig differenzierbare Funktion. Zu einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ lassen sich die Ableitungen der Funktion durch die sogenannten *zentralen Differenzenquotienten* annähern, gegeben durch

$$f'(x_0) \approx D_h f(x_0) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h},$$
$$f''(x_0) \approx \Delta_h f(x_0) := \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Taylor-Entwicklung, dass für diese Approximationen die Fehlerabschätzungen

(i)

$$|D_h f(x_0) - f'(x_0)| \leq \frac{1}{6} h^2 \sup_{x \in (a,b)} |f^{(3)}(x)|,$$

(ii)

$$|\Delta_h f(x_0) - f''(x_0)| \leq \frac{1}{12} h^2 \sup_{x \in (a,b)} |f^{(4)}(x)|,$$

gelten.

Aufgabe 2 (Taylor-Polynom, 6P)
Sei $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$f(x) = \sqrt{1 + x}.$$

(i) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom $T_3[f; x_0](x)$ der Ordung 3 für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(ii) Schätzen Sie den Betrag des Restglieds $|R_4(x)|$ für $|x| \leq \frac{1}{2}$ ab.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass der maximale Wert einer Funktion

$$g : (-1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad g(x) := \frac{1}{\sqrt[k]{1+x}}, \qquad k \in \mathbb{N}, k \geq 2,$$

auf jedem Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ und $a, b \geq -1$ im kleinsten Punkt a angenommen wird.

Aufgabe 3 (Ableitung monotoner Funktionen, Mittelwertsatz, 3P)
Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt

$$\begin{aligned} \text{monoton wachsend, falls } f(x_1) &\leq f(x_2), \\ \text{monoton fallend, falls } f(x_1) &\geq f(x_2), \end{aligned}$$

für alle $x_1, x_2 \in (a, b)$ mit $x_1 < x_2$ gilt.

Zeigen Sie: Ist die stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in (a, b) differenzierbar und gilt für alle $x \in (a, b)$ die Ungleichung $f'(x) \geq 0$ (analog: $f'(x) \leq 0$), so ist die Funktion f monoton wachsend (analog: monoton fallend).

Tipp: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis.

Aufgabe 4 (Newton-Verfahren, 5P)
Zur Berechnung von $\sqrt{2}$ kann man eine Nullstelle der Gleichung $f(x) = x^2 - 2$ suchen.

(i) Wie lautet die Iterationsvorschrift des Newtonverfahrens für $f(x) = x^2 - 2$?

(ii) Betrachte Sie das Intervall $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Bestimmen Sie auf diesem Intervall

$$m := \min_{\frac{1}{2} \leq x \leq 2} |f'(x)| \quad \text{und} \quad M := \max_{\frac{1}{2} \leq x \leq 2} |f''(x)|$$

für $f(x) = x^2 - 2$.

(iii) Bestimmen Sie einen Radius $\rho > 0$, so dass die Newton-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für jeden Startwert x_0 mit $|x_0 - \sqrt{2}| \leq \rho$ konvergiert.

(iv) Berechnen Sie zum Startwert $x_0 = 1$ die Folgenglieder $x_1, \ldots, x_4$.
Wie viele Dezimalstellen stimmen jeweils mit der exakten Lösung

$$\sqrt{2} \; = \; 1,414213562373095\ldots$$

überein?