

Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)  
Goethe-Universität Frankfurt am Main

## Mathematik für Studierende der Bioinformatik 1

(Übung zu B-MBI-1, Wintersemester 2015/2016)

Dr. S. Reiter, Dr. A. Vogel, Prof. Dr. G. Wittum

### Aufgabenblatt 6 (Abgabe: Mo., 30.11., 10:15h)

#### Aufgabe 1 (Summenfolge, 2P)

Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergente Folgen mit Grenzwerten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

Zeigen Sie: Dann ist auch die Summenfolge  $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent und für den Grenzwert gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n + b_n\} = a + b.$$

#### Aufgabe 2 (Division durch Multiplikation, 5P)

Zu  $a > 0$  sei die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  rekursiv definiert durch

$$x_{n+1} := x_n \cdot (2 - a \cdot x_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

mit einem Startwert  $0 < x_0 < \frac{1}{a}$ .

- (i) Zeigen Sie, dass für alle Folgenglieder gilt:  $0 < x_n < \frac{1}{a}, n \in \mathbb{N}$ .
- (ii) Zeigen Sie, dass es sich um eine konvergente Folge handelt.
- (iii) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge.

(**Hinweis:** Beachten Sie, dass  $a \cdot (x - \frac{1}{a})^2 > 0$  für  $0 < x < \frac{1}{a}$  gilt.)

#### Aufgabe 3 (Konvergenz von Reihen, 8P)

- (i) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$$

absolut konvergiert.

(ii) (a) Zeigen Sie, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

(b) Wie lautet der Grenzwert der Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}?$$

(c) Zeigen Sie, dass die folgende Reihe konvergent ist:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

**Hinweis:** Wie verhält sich diese Reihe zu derjenigen aus (b)?

(d) Können Sie in (c) das Quotientenkriterium anwenden?  
(Mit Begründung)

**Aufgabe 4** (Konvergenzradien von Potenzreihen, 2P)

Wie lautet der Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$(i) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \quad (ii) \sum_{k=1}^{\infty} 4^k x^k$$

**Aufgabe 5** (Exponentialfunktion, 3P)

Der *Binomialkoeffizient* ist definiert durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

und der sogenannte *binomischen Lehrsatz* lautet

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes, dass für die Exponentialfunktion gegeben durch

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

die folgende Funktionalgleichung gilt:

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y).$$