Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Mathematik für Studierende der Bioinformatik 1

(Übung zu B-MBI-1, Wintersemester 2015/2016)

Dr. S. Reiter, Dr. A. Vogel, Prof. Dr. G. Wittum

Aufgabenblatt 5 (Abgabe: Mo., 23.11., 10:15h)

Aufgabe 1 (Komplexer Betrag, 6 Punkte)
Seien $z, w \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen. Zeigen Sie, dass für die komplexe Konjugation gilt:

(i) $\overline{(z+w)} = \overline{z} + \overline{w}$,

(ii) $\overline{(z \cdot \overline{w})} = \overline{z} \cdot w$,

(iii) $z + \overline{z} = 2 \cdot \operatorname{Re} z$.

Zeigen Sie, dass für den Absolutbetrag $|z| := \sqrt{z \cdot \overline{z}}$ gilt:

(iv) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$,

(v) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,

(vi) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung).

Hinweise:
Zeigen Sie bei (v): $|z \cdot w|^2 = |z|^2 \cdot |w|^2$.
Zeigen Sie bei (vi): $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$. Verwenden Sie dazu die vorher gezeigten Abschätzungen und Gleichungen.

Aufgabe 2 (Konvergenz, 2P)
Betrachten Sie die Folge

$$a_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n^2} \ (n \geq 1, n \in \mathbb{N}),$$

die gegen den Grenzwert $a := \lim_{n\to\infty} a_n = 1$ konvergiert. Geben Sie für die folgenden $\epsilon > 0$ jeweils das minimale $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ an, ab dem die Abstandsabschätzung

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq n_\epsilon$$

gilt:

(i) $\epsilon = 1$, (ii) $\epsilon = \frac{1}{18}$, (iii) $\epsilon = \frac{1}{1000}$, (iv) $\epsilon = \frac{1}{100000}$.

Aufgabe 3 (Grenzwerte von Folgen, 6P)
Bestimmen Sie den Grenzwert der Folgen:

(i)
$$a_n := \frac{n^2 + 6n}{3n^2 + 7}$$

(ii)
$$a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

(iii)
$$a_n := \frac{n^{10}}{n!}$$

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass schon bekannt ist:

$$\frac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty), \text{ und } \sqrt{\frac{1}{n}} \to 0 \ (n \to \infty).$$

Aufgabe 4 (Bernoullische Ungleichung, 6P)

(i) Zeigen Sie, dass die sogenannte *Bernoullische Ungleichung* gilt:
Für jede reelle Zahl $x \geq -1$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

(**Hinweis:** vollständige Induktion)

(ii) Zeigen Sie: Für $a \in \mathbb{R}, a > 1$ konvergiert die Folge

$$a_n := \sqrt[n]{a} \qquad (n \geq 1, n \in \mathbb{N})$$

gegen 1 (mit $\sqrt[n]{a}$ ist Lösung von $x^n = a$).
(**Hinweis:** Schreiben Sie $a_n = 1 + h_n$ und verwenden Sie die Bernoullische Ungleichung. Was gilt für h_n?)

(iii) Zeigen Sie: Die Folge

$$a_n := q^n \ (n \in \mathbb{N}) \quad \text{ mit } |q| < 1$$

konvergiert gegen 0.
(**Hinweis:** Schreiben Sie $\frac{1}{|q|} = 1+h$ und verwenden Sie die Bernoullische Ungleichung.)