Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Mathematik für Studierende der Bioinformatik 1

(Übung zu B-MBI-1, Wintersemester 2015/2016)

Dr. S. Reiter, Dr. A. Vogel, Prof. Dr. G. Wittum

Aufgabenblatt 4 (Abgabe: Mo., 16.11., 10:15h)

Aufgabe 1 (Darstellungen im Binärsystem, 3 Punkte)
Stellen Sie die folgenden Zahlen im Binärsystem dar:

(i) $(796)_{10}$

(ii) $(0,90625)_{10}$

(iii) $(0,1)_{10}$

Geben Sie dabei den Rechenweg mit an.

Aufgabe 2 (Gleitkommadarstellung, 7 Punkte)
Für die Darstellung von reellen Zahlen $x \neq 0$ soll die folgende normalisierte Gleitkommadarstellung zur Basis 10 mit einer 4-stelligen Mantisse verwendet werden:

$$m_0, m_1 m_2 m_3 \ \cdot 10^{(e-4)}, \qquad \text{mit } e, m_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}, m_0 \neq 0.$$

Ist die Zahl $x \in \mathbb{R}$ nicht exakt darstellbar, so soll auf die nächstgelegene darstellbare Zahl $\mathrm{rd}(x)$ folgendermaßen gerundet werden:

$$x = m_0, m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 \ldots \cdot 10^{(e-4)},$$
$$\rightarrow \mathrm{rd}(x) = \begin{cases} m_0, m_1 m_2 m_3 \cdot 10^{(e-4)}, & m_4 \leq 4, \\ m_0, m_1 m_2 (m_3 + 1) \cdot 10^{(e-4)}, & m_4 \geq 5. \end{cases}$$

(i) Geben Sie die Darstellung der folgenden Zahlen in obiger Gleitkommadarstellung an:

  (a) $0,0456$

  (b) $100,043$

(ii) Die Menge der mit diesem Format darstellbaren Zahlen ist endlich. Wie viele Zahlen lassen sich damit darstellen?

(iii) Berechnen Sie den relativen Rundungsfehler $\frac{|x-\mathrm{rd}(x)|}{|x|}$ für die folgenden Zahlen:

(a) $4,987$

(b) $33,8888$

(iv) Bei der Addition zweier solcher Gleitkommazahlen soll zunächst exakt gerechnet werden und dann auf die nächste darstellbare Zahl gerundet werden. Somit wird $(x+y)-y$ gerechnet als $\mathrm{rd}(\,\mathrm{rd}(x+y)-y\,)$. Wie lautet das exakte Ergebnis von $(x+y)-y$ für die Zahlen

$$x = 0,01,$$
$$y = 100$$

und wie das darstellbare Ergebnis $\mathrm{rd}(\,\mathrm{rd}(x+y)-y\,)$. Wie groß ist der relative Fehler $\frac{|((x+y)-y)-\mathrm{rd}(\,\mathrm{rd}(x+y)-y)|}{|((x+y)-y)|}$?

Aufgabe 3 (Cauchy-Folgen für $\sqrt{3}$, 2 Punkte)
Analog zur Approximation von $\sqrt{2}$ in der Vorlesung lassen sich zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft $a_n^2 < 3 < b_n^2$, $b_n - a_n = 10^{-n}$ konstruieren, die die Lösung von $x^2 = 3$ immer genauer approximieren. Geben Sie die ersten 6 Folgenglieder dieser beiden Folgen an.

Aufgabe 4 (Mächtigkeit von Mengen, 5 Punkte)

(i) Welche Mächtigkeit besitzen die beiden folgenden Mengen:

(i) $A := \{2n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$,

(ii) $B := \{9, 18, 12, 15\}$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Mengen

$$A := \{n^2 \,|\, n \in \mathbb{N}\} \quad \text{und} \quad B := \{n^4 \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

gleich mächtig sind, indem Sie eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ angeben und explizit die Surjektivität und Injektivität ihrer Funktion nachweisen, indem Sie zeigen, dass gilt:
(a) Zu jedem $b \in B$ existiert ein $a \in A$ mit $f(a) = b$.
(b) Aus $f(a_1) = f(a_2)$ folgt $a_1 = a_2$.

Aufgabe 5 (Mächtigkeit der Potenzmenge, 3 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ überabzählbar ist.
Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis analog zur Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$.