Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Mathematik für Studierende der Bioinformatik 1

(Übung zu B-MBI-1, Wintersemester 2016/2017)

Dr. Xylouris

Aufgabenblatt 12 (Abgabe: Mi, 01.2.2017, 10:15h)

Aufgabe 1 (Lösung von Gleichungssystemen, 6 Punkte)
Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}(\mathbf{A},\mathbf{b})$ der folgenden Gleichungssysteme $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$ (mit $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{3\times 3},\mathbf{x},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^3$) notiert als erweiterte Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A},\mathbf{b})$ und geben Sie dabei den Rechenweg explizit an:

$$\text{(i)}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 8\\ 1 & 1 & 4 & 1\\ 4 & 2 & 1 & 7\end{array}\right),\qquad \text{(ii)}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1\\ 4 & 5 & 6 & 1\\ 7 & 8 & 9 & 1\end{array}\right),\qquad \text{(iii)}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 9 & 6 & 3 & 1\end{array}\right).$$

Aufgabe 2 (Lineare Unabhängigkeit, 6 Punkte)
Bestimmen Sie, ob die folgenden Familien von Vektoren linear unabhängig sind und begründen Sie Ihre Antwort:

$$\text{(i) }\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)\quad \text{(ii) }\left(\begin{pmatrix}3\\9\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\6\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}\right)\quad \text{(iii) }\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\6\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\\4\\7\end{pmatrix}\right)$$

Aufgabe 3 (Linearkombination, 4 Punkte)
Bestimmen Sie, ob sich die folgenden Vektoren

$$\text{(i) }\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\quad \text{(ii) }\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$$

in dem linearen Untervektorraum erzeugt durch

$$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\right\}$$

enthalten sind und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (Untervektorraum, 4 Punkte)
Zeigen Sie, dass zu einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die Mengen K und B gegeben durch

(i) $K := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^n$,

(ii) $B := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \text{Es gibt } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}\} \subset \mathbb{R}^m$

jeweils einen Untervektorraum bilden.