Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Mathematik für Studierende der Bioinformatik 1

(Übung zu B-MBI-1, Wintersemester 2016/2017)

Dr. Xylouris

Aufgabenblatt 7 (Abgabe: Mi., 7.12., 8:30h)

Aufgabe 1 (Stetigkeit, 6P)
Zeigen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Funktionen stetig bzw. unstetig sind:

(i)

$$f(x) := \max\left\{\frac{x}{2}, 1\right\}$$

(ii)

$$f(x) := \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ x^2 + 2, & x \geq 0. \end{cases}$$

Aufgabe 2 (Stetigkeit bei Komposition von Funktionen, 4P)
Seien $g : D \to B \subset \mathbb{R}$ und $f : B \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch die *Komposition* $f \circ g : D \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)), \quad \text{für alle } x \in D,$$

eine stetige Funktion ist.

Aufgabe 3 (Lipschitz-Stetigkeit, 3P)
Sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig auf D, falls es eine Konstante L gibt, so dass für alle $x, y \in D$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Zeigen Sie, dass Lipschitz-stetige Funktionen stetig sind.

Aufgabe 4 (Natürlicher Logarithmus, 4P)
Zeigen Sie die folgenden Rechengesetze für den natürlichen Logarithmus:

$$\begin{aligned} (i)\ \text{Für alle } x, y \geq 0 \text{ gilt}: &\quad \ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y), \\ (ii)\ \text{Für alle } x \geq 0, r \in \mathbb{Q} \text{ gilt}: &\quad \ln(x^r) = r \cdot \ln(x). \end{aligned}$$

Hinweis: Beachten Sie die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und die Rechenregeln für Potenzen $(a^b)^c = a^{(c \cdot b)} = (a^c)^b$.

Aufgabe 5 (Zwischenwertsatz, 3P)
Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie: Dann gibt es ein $c \in [0, 1]$, so dass gilt:

$$f(c) = f(c + \frac{1}{2}).$$

Hinweis: Betrachten Sie $g : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := f(x) - f(x + \frac{1}{2})$.