Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Mathematik für Studierende der Bioinformatik 1

(Übung zu B-MBI-1, Wintersemester 2016/2017)

Dr. Xylouris

Aufgabenblatt 6 (Abgabe: Mi., 30.11., 08:30h)

Aufgabe 1 (Summenfolge, 2P)
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit Grenzwerten

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Zeigen Sie: Dann ist auch die Summenfolge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und für den Grenzwert gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \{a_n + b_n\} = a + b.$$

Aufgabe 2 (Division durch Multiplikation, 5P)
Zu $a > 0$ sei die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch

$$x_{n+1} := x_n \cdot (2 - a \cdot x_n) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

mit einem Startwert $0 < x_0 < \frac{1}{a}$.

(i) Zeigen Sie, dass für alle Folgenglieder gilt: $0 < x_n < \frac{1}{a}, n \in \mathbb{N}$.

(ii) Zeigen Sie, dass es sich um eine konvergente Folge handelt.

(iii) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge.

(**Hinweis:** Beachten Sie, dass $a \cdot (x - \frac{1}{a})^2 > 0$ für $0 < x < \frac{1}{a}$ gilt.)

Aufgabe 3 (Konvergenz von Reihen, 8P)

(i) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$$

absolut konvergiert.

(ii) (a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

(b) Wie lautet der Grenzwert der Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}?$$

(c) Zeigen Sie, dass die folgende Reihe konvergent ist:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Hinweis: Wie verhält sich diese Reihe zu derjenigen aus (b)?

(d) Können Sie in (c) das Quotientenkriterium anwenden?
(Mit Begründung)

Aufgabe 4 (Konvergenzradien von Potenzreihen, 2P)
Wie lautet der Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$(i) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \qquad (ii) \sum_{k=1}^{\infty} 4^k x^k$$

Aufgabe 5 (Exponentialfunktion, 3P)
Der *Binomialkoeffizient* ist definiert durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

und der sogenannte *binomischen Lehrsatz* lautet

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \qquad \text{für } x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes, dass für die Exponentialfunktion gegeben durch

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

die folgende Funktionalgleichung gilt:

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y).$$