

Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Mathematik für Studierende der Bioinformatik 1

(Übung zu B-MBI-1, Wintersemester 2016/2017)

Dr. Logashenko, Dr. Xylouris

Aufgabenblatt 5 (Abgabe: Mi., 23.11., 8:30h)

Aufgabe 1 (Komplexer Betrag, 6 Punkte)

Seien $z, w \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen. Zeigen Sie, dass für die komplexe Konjugation gilt:

(i) $\overline{(z + w)} = \bar{z} + \bar{w}$,

(ii) $\overline{(z \cdot \bar{w})} = \bar{z} \cdot w$,

(iii) $z + \bar{z} = 2 \cdot \operatorname{Re} z$.

Zeigen Sie, dass für den Absolutbetrag $|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ gilt:

(iv) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$,

(v) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,

(vi) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung).

Hinweise:

Zeigen Sie bei (v): $|z \cdot w|^2 = |z|^2 \cdot |w|^2$.

Zeigen Sie bei (vi): $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$. Verwenden Sie dazu die vorher gezeigten Abschätzungen und Gleichungen.

Aufgabe 2 (Konvergenz, 2P)

Betrachten Sie die Folge

$$a_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (n \geq 1, n \in \mathbb{N}),$$

die gegen den Grenzwert $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ konvergiert. Geben Sie für die folgenden $\epsilon > 0$ jeweils das minimale $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ an, ab dem die Abstandsabschätzung

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq n_\epsilon$$

gilt:

(i) $\epsilon = 1$, (ii) $\epsilon = \frac{1}{18}$, (iii) $\epsilon = \frac{1}{1000}$, (iv) $\epsilon = \frac{1}{100000}$.

Aufgabe 3 (Grenzwerte von Folgen, 6P)

Bestimmen Sie den Grenzwert der Folgen:

(i)

$$a_n := \frac{n^2 + 6n}{3n^2 + 7}$$

(ii)

$$a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

(iii)

$$a_n := \frac{n^{10}}{n!}$$

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass schon bekannt ist:

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{1}{n}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Aufgabe 4 (Bernoullische Ungleichung, 6P)(i) Zeigen Sie, dass die sogenannte *Bernoullische Ungleichung* gilt:Für jede reelle Zahl $x \geq -1$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

(Hinweis: vollständige Induktion)(ii) Zeigen Sie: Für $a \in \mathbb{R}, a > 1$ konvergiert die Folge

$$a_n := \sqrt[n]{a} \quad (n \geq 1, n \in \mathbb{N})$$

gegen 1 (mit $\sqrt[n]{a}$ ist Lösung von $x^n = a$).**(Hinweis:** Schreiben Sie $a_n = 1 + h_n$ und verwenden Sie die Bernoullische Ungleichung. Was gilt für h_n ?)

(iii) Zeigen Sie: Die Folge

$$a_n := q^n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{mit} \quad |q| < 1$$

konvergiert gegen 0.

(Hinweis: Schreiben Sie $\frac{1}{|q|} = 1+h$ und verwenden Sie die Bernoullische Ungleichung.)