Goethe-Center for Scientific Computing (G-CSC)
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Mathematik für Studierende der Bioinformatik 1

(Übung zu B-MBI-1, Wintersemester 2016/2017)

Dr. Logashenko, Dr. Xylouris

Aufgabenblatt 2 (Abgabe: Mo., 31.10., 10:00h)

Aufgabe 1 (Injektiv / Surjektiv, 6 Punkte)
Geben Sie an, ob die folgenden Funktionen injektiv und/oder surjektiv sind. Geben Sie im Falle von nicht-injektiv und/oder nicht-surjektiv eine Begründung an, warum die jeweilige Funktion diese Eigenschaft nicht besitzt.

(i) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) := n^2,$

(ii) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+, \quad g(n) := n + 1,$

(iii) $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N},$

$$h(n) := \begin{cases} n, & n \geq 0, \\ -n, & n < 0. \end{cases}$$

Aufgabe 2 (Summe ungerader Zahlen, 4 Punkte)
Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für die Summe der ungeraden Zahlen gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2, \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 3 (Induktionsbeweise, 6 Punkte)
Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

(i) $2n > n + 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$

(ii) $2^n > 2n + 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5.$

(iii) $n^2 < 2^n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5.$

Hinweis: Beachten Sie, dass bereits in den Teilschritten (i) und (ii) bewiesene Aussagen in den nachfolgenden Teilaufgaben verwendet werden dürfen.

Aufgabe 4 (Spielanzahl im K.O.-System, 4 Punkte)
Bei Turnieren im K.O.-System (z.B. Endrunden Fußball-WM oder -EM, Tennisturniere, ...) ist die Anzahl der Mannschaften eine Zweierpotenz $2^n, n \in \mathbb{N}$. In diesem Spielsystem treten in jeder Runde zwei Teilnehmer gegeneinander an. Der Verlierer verlässt das Turnier, der Gewinner kommt in die nächste Runde. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Anzahl der Spiele des gesamten Turniers genau $2^n - 1$ beträgt.

Aufgabe 5 (Induktion, 6 Punkte + 4 Zusatzpunkte + 4 Zusatzpunkte)
Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass folgende Identitäten erfüllt sind ($n \in \mathbb{N}$ sei stets eine natürliche Zahl):

(i) $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(ii) $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

(iii) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.
Zeige $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.

Aufgabe 6 (Fibonacci-Quotienten, 4 Punkte + 4 Punkte)
Die Fibonacci-Folgen sind rekursiv definiert

(i) Die standardmäßige Fibonacci-Folge ist definiert durch:

$$f_{n+2} := f_{n+1} + f_n, \quad f_0 = 1, f_1 = 1 \tag{1}$$

Berechne den Limes $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+2}}{f_n} = x. \tag{2}$$

Was passiert mit dem Limes, wenn man andere Startwerte wählt?

(ii) Sei nun eine um $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ modifizierte Fibonacci-Folge gegeben

$$f_{n+2} := f_{n+1} + \alpha f_n, \quad f_0 = 1, f_1 = 1 \tag{3}$$

Berechne den Grenzwerte $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} = x. \tag{4}$$